Μαθηματικά Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

1ο Θέμα:

Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=3$ και $\hat{\phi}=\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$ και εξίσωση

(ε): $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3)x+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3)y-1=0$ για κάθε $\phi\in[0,\pi]$.

i. Να δείξετε ότι η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\phi\in[0,\pi]$.

ii. Η ευθεία αυτή περνά πάντα από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

iii. Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση y=8 τότε να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}=-3\vec{\alpha}$.

iv. Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v}=3\vec{i}$ τότε να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$.

v. Αν η ευθεία με εξίσωση y=x είναι παράλληλη στην (ε) τότε να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες.

2ο Θέμα:

Έστω $\phi\in[0,2\pi)$ και η εξίσωση C: $x^2+y^2+(\eta\mu\phi)x+(\sigma\upsilon\nu\phi)y-2=0$.

i. Να δείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο.

ii. Το κέντρο του κύκλου ανήκει σε μία κωνική τομή για κάθε $\phi\in[0,2\pi)$.

iii. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) : $(\eta\mu\phi)x+(\sigma\upsilon\nu\phi)y=1$ εφάπτεται στον κύκλο.

iv. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\begin{cases}\alpha(\alpha+\eta\mu\phi)+\beta(\beta+\sigma\upsilon\nu\phi)=2\\ \gamma(\gamma+\eta\mu\phi)+\delta(\delta+\sigma\upsilon\nu\phi)=2\end{cases}$, να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η παράσταση $\mathrm{A}=(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2$.

3ο Θέμα:

Δίνονται οι ακέραιοι $\alpha=6\kappa+4$ και $\beta=6\kappa+2$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha^2-\beta^2=12\lambda$.

ii. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha^2+\beta^2$ με το 18.

iii. Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ αν $\kappa\in\mathbb{Z}$.

iv. Να βρείτε τα σημεία Μ ώστε ΟΜ=ελάχιστο.

4ο Θέμα:

Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-1$.

Να δείξετε ότι:

i. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι επίσης μοναδιαίο.

ii. Για τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{v}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και $\vec{w}=\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ ισχύει ότι $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|=2$.

iii. $|\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}|=|\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}|=|-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|=2$.

iv. Το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι κάθετο στο $\vec{v}-\vec{w}$.

ΛΥΣΕΙΣ

1ο Θέμα:

i. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3=0$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3=0$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3$ που είναι προφανώς αδύνατο, οπότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\neq 0$ ή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\neq 0$ άρα η (ε) παριστάνει ευθεία.

ii. Η (ε) γίνεται $\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}(x+y)+(3x-3y-1)=0\Leftrightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\phi(x+y)+(3x-3y-1)=0$.

Πρέπει $\begin{cases} x+y=0 \\ \text{και} \\ 3x\text{-}3y\text{-}1=0 \end{cases} \Rightarrow \ldots \begin{cases} x=\dfrac{1}{6} \\ y=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$

Το σημείο $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)$ επαληθεύει την (ε) για κάθε $\phi\in[0,\pi]$.

iii. Πρέπει

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3\Leftrightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\phi=-3\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\phi=-1\Leftrightarrow\phi=\pi$. Άρα

$\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|=3|\vec{\alpha}|$ άρα $\vec{\beta}=-3\vec{\alpha}$.

iv. Πρέπει

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\Leftrightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\phi=3\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\phi=1\Leftrightarrow\phi=0$. Άρα

$\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|=3|\vec{\alpha}|$ άρα $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$.

v. $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3}=1\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3=3-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

Για $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ η (ε) γίνεται: $3x\text{-}3y\text{-}1=0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(\frac{1}{3},0\right)$ και $B\left(0,-\frac{1}{3}\right)$.

$$E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}\right|\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{18}\text{ τετραγωνικές μονάδες}.$$

2ο Θέμα:

i. $A^2+B^2-4\Gamma=(\eta\mu\phi)^2+(\sigma\upsilon\nu\phi)^2-4(-2)=1+8=9>0$. Άρα η C παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{\eta\mu\phi}{2},-\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{9}}{2}=\frac{3}{2}$.

ii. Το $K\left(-\frac{\eta\mu\phi}{2},-\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right)$ και $\phi\in[0,2\pi)$. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{\eta\mu\phi}{2} \\ y&=-\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}2x&=-\eta\mu\phi\\ 2y&=-\sigma\upsilon\nu\phi\end{aligned}\right\}\Rightarrow(2x)^2+(2y)^2=(-\eta\mu\phi)^2+(-\sigma\upsilon\nu\phi)^2=1\Rightarrow$$

$$4x^2+4y^2=1\Rightarrow C_2:\ x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

Δηλαδή η C_2 παριστάνει κύκλο με κέντρο $K_2(0,0)$ και $\rho=\frac{1}{2}$.

iii. Αρκεί να δείξουμε ότι: $d(K,\varepsilon)=\rho$. Όμως: $K\left(-\frac{\eta\mu\phi}{2},-\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right)$

οπότε:

$$d(K,\varepsilon)=\frac{\left|\eta\mu\phi\left(-\frac{\eta\mu\phi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\phi\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right)-1\right|}{\sqrt{(\eta\mu\phi)^2+(\sigma\upsilon\nu\phi)^2}}=\frac{\left|-\frac{\eta\mu^2\phi}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\phi}{2}-1\right|}{\sqrt{1}}=\frac{\left|-\frac{1}{2}-1\right|}{1}=\frac{3}{2}=\rho$$

iv. Προφανώς τα σημεία $A(\alpha,\beta)$ και $B(\gamma,\delta)$ είναι σημεία του κύκλου C. Επίσης η παράσταση $A=(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2=AB^2$. Η μεγαλύτερη όμως απόσταση δύο σημείων του κύκλου είναι $AB_{max}=2\rho=2\frac{3}{2}=3$. Άρα η μεγαλύτερη τιμή της $A_{max}=3^2=9$.

3ο Θέμα:

i. Είναι

$$\begin{cases} \alpha^2 = (6\kappa+4)^2 = 36\kappa^2+48\kappa+16 \\ \beta^2 = (6\kappa+2)^2 = 36\kappa^2+24\kappa+4 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2-\beta^2 = (36\kappa^2+48\kappa+16)-(36\kappa^2+24\kappa+4)$$

$$\Rightarrow \alpha^2-\beta^2 = 24\kappa+12 = 12(2\kappa+1)$$

Άρα $12/(\alpha^2-\beta^2)$ δηλαδή $\alpha^2-\beta^2=12\lambda$.

ii. Επίσης:

$\alpha^2+\beta^2 = (36\kappa^2+48\kappa+16)+(36\kappa^2+24\kappa+4) = 72\kappa^2+72\kappa+20 = 18(4\kappa^2)+18(4\kappa)+18+2 =$

$18(4\kappa^2+4\kappa+1)+2$ (1)

και αφού $4\kappa^2+4\kappa+2\in\mathbb{Z}$ συνεπάγεται ότι η (1) είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του $\alpha^2+\beta^2$ με το 18 και ότι υ=2.

iii. $\mathrm{M}(6\kappa+4, 6\kappa+2)$. Έστω

$$\left.\begin{aligned} x = 6\kappa+4 \\ y = 6\kappa+2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 6\kappa \\ y-2 = 6\kappa \end{cases} \Rightarrow x-4 = y-2 \Rightarrow x-y=2$$

. Άρα το σημείο Μ κινείται στην ευθεία x-y=2 , έχοντας ακέραιες συντεταγμένες.

iv. Το ΟΜ γίνεται ελάχιστο όταν OM^2 γίνει ελάχιστο.

$\mathrm{OM}^2 = x_M^2+y_M^2 = \alpha^2+\beta^2 = 72\kappa^2+72\kappa+20$. Το τριώνυμο παρουσιάζει ελάχιστο για $\kappa = -\frac{72}{2\cdot 72} = -\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

Άρα εξετάζουμε την απόσταση ΟΜ για τα σημεία με $\kappa=-1$ και $\kappa=0$.

Για $\kappa=-1$, $\mathrm{M}(-2,-4)$ $\mathrm{OM}=\sqrt{20}$

Για $\kappa=0$, $\mathrm{M}(4,2)$ $\mathrm{OM}=\sqrt{20}$

. Επομένως αυτά τα δύο σημεία είναι με την ελάχιστη απόσταση από το Ο.

<u>4ο</u> Θέμα:

i.

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} =$$

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\gamma}\right|^2+2\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right) = 1^2+1^2+1^2+2(-1) = 1$$

Άρα $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right| = 1$

ii. $\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right| = \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right| = 2\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right| = 2$

iii. $\left|\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\right| = \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)\right| = 2\left|\vec{\beta}\right| = 2$ Ομοίως αποδεικνύονται ότι:

$\left|\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\right| = \left|-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right| = 2$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\right|^2 = \left|\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\right|^2 \Rightarrow$$

iv.

$$\vec{u}^2+\vec{v}^2+\vec{w}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{w}-2\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{u}^2+\vec{v}^2+\vec{w}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{w}-2\vec{v}\cdot\vec{w}$$

$$\Rightarrow 4\vec{u}\cdot\vec{v}-4\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow 4\vec{u}\cdot\left(\vec{v}-\vec{w}\right)=0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\left(\vec{v}-\vec{w}\right)=0.\ \text{Άρα}\ \vec{u}\perp\left(\vec{v}-\vec{w}\right).$$

Προτεινόμενα Θέματα

<u>1ο</u> Έστω ο αριθμός $\mathrm{A} = \frac{5\kappa-2}{3}$.

i. Να βρείτε κάθε ακέραιο κ ,ώστε ο Α να είναι ακέραιος.
ii. Να βρείτε τους ακέραιους κ ώστε ο Α να είναι τετράγωνο ακέραιου.
iii. Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος κ>1 ,ώστε η εξίσωση $x^2+2x+1-\frac{A}{4}=0$ να έχει ρητές λύσεις.

<u>2ο</u> Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-2 = 2x\ln\theta+\ln^2\theta+4\ln\theta$ όπου $\theta>0$

i. Για ποιες τιμές του θ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο;
ii. Για τις τιμές που βρέθηκαν στο ερώτημα (i) να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.
iv. Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του θ ώστε η ευθεία με εξίσωση $x=y-4$ να εφάπτεται του κύκλου.