ΘΕΜΑ 1^o Από τα λιμάνια A(-6,17) και B(2,-14) αναχωρούν συγχρόνως 2 πλοία $Π_1$ και $Π_2$.Οι συντεταγμένες των πλοίων είναι οι εικόνες των μιγαδικών, $z_1=(4t-6)+(17-3t)i$ και $z_2=3t+2+(4t-14)i$, t σε ώρες και $t \geq 0$.

Α)Πόσο θα απέχουν μετά από μια ώρα ταξίδι;

Β)υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης;

Γ)που πρέπει να φτιάξουμε σταθμό ανεφοδιασμού που να εξυπηρετεί και τα 2 πλοία;

Δ)Ποια χρονική στιγμή το μέτρο του z1 γίνεται ελάχιστο;

ΛΥΣΗ

Α)Για t=1 $z_1=-2+14i$ και $z_2=5-10i$ και $z_1-z_2=-7+24i$ αρα

$$Π_1Π_2=|z_1-z_2|=\sqrt{(-7)^2+24^2}=\sqrt{625}=25 .$$

Β)Εξετάζουμε αν υπάρχει $t \geq 0$ τέτοιο ώστε $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4t-6=3t+2 \\ 17-3t=4t-14 \end{cases}$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει λύση για το (Σ).

Γ)Πρώτα θα βρούμε τις πορείες που κάνουν τα πλοία.

$$\left.\begin{array}{l} x=\mathrm{Re}(z_1)=4t-6 \\ y=\mathrm{Im}(z_1)=17-3t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+6}{4}=t\geq 0 \\ \frac{17-y}{3}=t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+6}{4}=\frac{17-y}{3}$$ αρα $ε_1$:3x+4y=50 με $χ \geq -6$.

Με όμοια διαδικασία για το z_2 έχουμε ε2:4x-3y=50 με $χ \geq 2$.

Προφανώς ο σταθμός ανεφοδιασμού πρέπει να γίνει στο σημείο τομής των $ε_1$ και $ε_2$. $\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=50 \\ 4x-3y=50 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x,y)=(14,2)$

Δ)Για να βρούμε τον z_1 πρέπει να βρούμε ποιο σημείο της $ε_1$ απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων. τελικά πρέπει να βρούμε το σημείο τομής της καθέτου προς την $ε_1$ από το O και της $ε_1$.Αρα λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ 3x+4y=50 \end{cases} \Leftrightarrow 3x+4\cdot\frac{4}{3}x=50 \Leftrightarrow 25x=150 \Leftrightarrow x=6$ και y=8. Αρα πρέπει $x=4t-6=6 \Leftrightarrow 4t=12 \Leftrightarrow t=3h$.

ΘΕΜΑ 2^o Εστω f συνάρτηση ορισμένη στο **R** , δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(x)-2\int_0^x f(t)dt=2x+2003$ (1)

Α)Βρείτε τον τύπο της f

Β)Δείξτε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια αρνητική ρίζα.

Γ)Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο A(0,f(0)).

Δ)Δείξτε ότι $f(x) \geq 4008x+2003$.

ΛΥΣΗ

Α)Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, επομένως όλες οι συναρτήσεις που υπάρχουν στην εξίσωση (1) είναι παραγωγίσιμες. Παραγωγίζοντας την παίρνουμε $f'(x)-2f(x)=2$

Πολ/ντας με e^{-2x} παίρνουμε $e^{-2x}\cdot f'(x)+\left(e^{-2x}\right)'\cdot f(x)=\left(-e^{-2x}\right)'$

Αρα $\left(e^{-2x}\cdot f(x)\right)'=\left(-e^{-2x}\right)'$ οπότε $e^{-2x}\cdot f(x)=-e^{-2x}+c$ (2),

για x=0 από την (2) παίρνουμε f(0)=-1+c.Όμως από την (1) για x=0 παίρνουμε f(0)=2003 άρα c=2004 και τελικά

$$f(x)=\frac{-e^{-2x}+2004}{e^{-2x}}=-1+2004e^{2x} .$$

Β)Η f είναι συνεχής στο (-∞,0] και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 < 0$ f(0)=2003>0.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το (-1,2003] και σύμφωνα με το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0∈(-∞,ο) τέτοιο ώστε f(x_0)=0.Ομως $f'(x) = 4008e^{2x} > 0$ άρα f γν.αύξουσα και επομένως η λύση είναι μοναδική.

Γ)f(0)=2003 και f΄(0)=4008   άρα y-2003=4008(x-0) οπότε y=4008x+2003.

Δ)Είναι $f''(x) = 8016e^{2x} > 0$ άρα η f είναι κυρτή και η C_f πάνω από την y=4008x+2003 δηλαδή f(x) ≥ 4008x+2003.

ΘΕΜΑ 3ο Α. Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο **R**.Αν υπάρχει x_0 ∈ **R** ώστε $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) > 0$ ν.δ.ο. η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 .

ΛΥΣΗ

$f^{(3)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0}$.Επειδή $f^{(3)}(x_0) > 0$ θα είναι και

$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ άρα και $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ σε περιοχή του x_0 .

Για x∈ (x_0-δ,x_0) είναι x-x_0<0 άρα f˝(x)<0 .
Για x∈ (x_0,x_0+δ) είναι x-x_0>0 άρα f˝(x)>0.Επομένως η f παρουσιάζει
στο σημείο (x_0 ,f(x_0)) καμπή.

Β. Δίνεται συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο **R** .Αν ισχύει f(x) ≥ 0 και η εξίσωση f(x)=0 έχει μόνο 3 ρίζες ν,δ.ο. η $f^{(3)}(x)$ έχει 3 τουλάχιστον ρίζες.

ΛΥΣΗ

Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ οι λύσεις της f(x)=0. Επειδή f(x) ≥ 0 έπεται πως
η συνάρτηση στα ρ_1,ρ_2 και ρ_3 παρουσιάζει ελάχιστο ενώ είναι και παραγωγίσιμη. Σύμφωνα με το Θ.Fermat θα είναι
$f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = f'(\rho_3) = 0$. Επίσης η f πληρεί τις προϋποθέσεις του θ.Rolle στα [ρ_1,ρ_2] και [ρ_2,ρ_3] άρα θα υπάρχουν ξ_1∈(ρ_1,ρ_2) και ξ_2∈(ρ_2,ρ_3) έτσι ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Αφού η $f'(x) = 0$ έχει 5 τουλάχιστον ρίζες με εφαρμογή του θ.Rolle στα αντίστοιχα διαστήματα που δημιουργούνται προκύπτει ότι η $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 4 και τελικά η $f^{(3)}(x)$=0 3 τουλάχιστον ρίζες.

ΘΕΜΑ 4ο Α. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α,β] και 1-1 με f(α)=α και f(β)=β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των καμπυλών y=f(x) και $y = f^{-1}(x)$ στο [α,β] είναι Ε=$\int_\alpha^\beta |f(x) - x| dx$.

Β. Αν είναι $f(x) = \sqrt{x} - x$ με 0 ≤ x ≤ ¼ να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των y=f(x) και $y = f^{-1}(x)$.

ΛΥΣΗ

Α. Έστω (χωρίς βλάβη γενικότητας) , ότι για κάθε xϵ [α,β] είναι $f(x) \geq f^{-1}(x)$ τότε $E = \int_\alpha^\beta [f(x) - f^{-1}(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$ (1)

στο $\int_a^\beta f^{-1}(x)dx$ θέτω x=f(u) με dx=f΄(u)du , f(u)=α=f(α) $\Rightarrow$ u=α και f(u)=β=f(β) $\Rightarrow$ u=β αφού f 1-1. Επομένως έχουμε

$\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx = \int_a^\beta f^{-1}(f(u))f'(u)du = \int_\alpha^\beta uf'(u)du = [uf(u)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(u)du =$

$\beta^2 - \alpha^2 - \int_\alpha^\beta f(u)du = 2\int_\alpha^\beta udu - \int_a^\beta f(u)du$ ή $2\int_\alpha^\beta xdx - \int_a^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta 2x - f(x)dx$

άρα (1) : Ε=$2\int_\alpha^\beta [f(x) - x]dx$.Αν θεωρήσουμε ότι $f(x) \leq f^{-1}(x)$ τότε θα καταλήγαμε στη σχέση Ε=$2\int_\alpha^\beta [x - f(x)]dx$, άρα τελικά Ε=2 $\int_\alpha^\beta |f(x) - x|dx$.

Β. Η f εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής και 1-1 με f(0)=0 και f(1/4)=1/4 άρα $\mathrm{E} = 2\int_0^{\frac{1}{4}} |f(x) - x|dx = 2\int_0^{\frac{1}{4}} |\sqrt{x} - 2x|dx$ με

$\sqrt{x} - 2x \geq 0$ Ε=2 $\int_0^{\frac{1}{4}} (\sqrt{x} - 2x)dx$=…=1/6-1/8=1/24τμ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ:

1.α)Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln t}$$

β)Να μελετήσετε την μονοτονία της f.

γ)Να αποδείξετε ότι f(x) ≤ x ,x>0

δ) Να αποδείξετε ότι f(x) ≥ ln2, x ≥ 1

2.Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right)$ με xϵ$\mathbb{R}$

i)να υπολογίσετε την παράγωγο της f.

ii)επίσης το ολοκλήρωμα I=$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}dx$

iii)έστω J=$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}}dx$ και K=$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 2}dx$ να δείξετε ότι J+2I=K

iv)να δείξετε ότι $K = \sqrt{3} - J$ και να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα J και K.