ΣΤΟ ΔΡΟΜΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

Η εφημερίδα μας σε συνεργασία με το Φροντιστήριο «Ηράκλειτος» θα δημοσιεύει προτεινόμενα θέματα για τις Πανελλαδικές εξετάσεις με σκοπό να συνδράμει με έγκριτο τρόπο την προετοιμασία των υποψηφίων μαθητών της Β΄ και Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

<u>Ζήτημα 1ο</u> Δίνονται οι ακέραιοι $a=\nu^2+\nu+1$ και $\beta=\nu^2-\nu+1$,όπου ν θετικός ακέραιος .

α)Να δείξετε ότι οι α και β είναι περιττοί.

β)Να δείξετε ότι το κλάσμα $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ανάγωγο.

γ)Να δείξετε ότι Β= $\dfrac{(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta+1)^2+(\alpha+\beta+3)^2-2(\alpha+\beta)+2}{4}$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

<u>Ζήτημα 2ο</u> .Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=15$,$|\vec{\beta}|=3$,$|\vec{\gamma}|=6$ και $3\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\vec{\gamma}+6\vec{\beta}\vec{\gamma}=225$

α)Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$

β)Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι κάθετα

γ)Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ έχουν κοινή αρχή Ο , έστω $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ και $\vec{\gamma}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$ τότε τα πέρατα είναι συνευθειακά.

<u>Ζήτημα 3ο</u> .Δίνονται τα σημεία Α(2+3t,5t+1) και Β(3t-1,5t+5)

α)Να δείξετε ότι η απόσταση των δύο σημείων είναι σταθερή και ανεξάρτητη της τιμής του t.

β)Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β κινούνται σε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ καθώς το t∈$\mathbb{R}$

γ)Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης.

δ)Υπάρχει t∈$\mathbb{R}$ ώστε ΑΒ$\perp$ ε_1 και ΑΒ$\perp\varepsilon_2$;

ε)Να βρείτε την απόσταση $d\left(\varepsilon_{1,}\varepsilon_2\right)$

<u>Ζήτημα 4ο</u> .Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2+4x+3=0$ και $C_2: x^2+y^2-4x-5=0$

α)Να βρείτε την σχετική τους θέση

β)Να δείξετε ότι οι κοινές εξωτερικές εφαπτομένες τέμνονται στον xx'.Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν.

γ)Να δείξετε ότι ο Γεωμετρικός Τόπος των κέντρων κύκλου που εφάπτεται εξωτερικά στους δύο παραπάνω κύκλους είναι τμήμα υπερβολής.

δ)Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με τις ίδιες εστίες με την παραπάνω υπερβολή και εκκεντρότητα αντίστροφη.

ΛΥΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο α)Ο α =ν(ν+1)+1 ,γνωρίζουμε όμως ότι το γινόμενο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος άρα ν(ν+1)=2κ και επομένως ο α της μορφής α=2κ+1 .Επομένως ο α είναι περιττός .
Όμοια β =ν(ν-1)+1=2μ+1 άρα και β περιττός .

β)Για να δείξουμε ότι το κλάσμα είναι ανάγωγο αρκεί να δείξουμε ότι ο μόνος θετικός ακέραιος που διαιρεί τους όρους του κλάσματος Α είναι το 1.Έστω δ|α και δ|β τότε

$$\left.\begin{array}{l} \delta \left| \nu^2+\nu+1 \right. \\ \delta \left| \nu^2-\nu+1 \right. \end{array}\right\} \quad \delta \left| \left(\nu^2+\nu+1\right)-\left(\nu^2-\nu+1\right) \right. \Rightarrow \delta | 2\nu$$

$$\left.\begin{array}{c} \delta | 2\nu \\ \delta \left| \nu^2+\nu+1 \right. \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \delta | 2\nu\cdot\nu \\ \delta \left| 2\left(\nu^2+\nu+1\right) \right. \end{array}\right\} \Rightarrow \delta \left| 2\nu^2+2\nu+2-2\nu^2 \right.$$ άρα δ|2ν+2

$$\left.\begin{array}{c} \delta | 2\nu \\ \delta | 2\nu+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta | 2\nu+2-2\nu \Rightarrow \delta | 2$$ Άρα δ=1 ή δ=2.Όμως οι αριθμοί α και β είναι περιττοί οπότε δ=2 απορρίπτεται σαν λύση.
Επομένως δ=1 και το κλάσμα είναι ανάγωγο.

γ)Επειδή α και β περιττοί το άθροισμα τους θα είναι άρτιος άρα α+β=2κ έτσι αντικαθιστώντας στην παράσταση έχουμε:

$$\mathrm{B}=\frac{(2\kappa)^2+(2\kappa+1)^2+(2\kappa+3)^2-2(2\kappa)+2}{4}=$$

$$=\frac{4\kappa^2+4\kappa^2+4\kappa+1+4\kappa^2+12\kappa+9-4\kappa+2}{4}=$$ όπου κ,μ∈ℤ

$$=\frac{12\kappa^2+12\kappa+12}{4}=\frac{12\left(\kappa^2+\kappa+1\right)}{4}=3\left(\kappa^2+\kappa+1\right)=3\mu$$

Ζήτημα 2ο α) Για να αποδείξουμε ότι το $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$ αρκεί να δείξουμε ότι το μέτρο του παραπάνω διανύσματος είναι μηδεν.

$$\left|\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}\right|^2=\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}\right)^2=\vec{\alpha}^2+\left(3\vec{\beta}\right)^2+(2\vec{\gamma})^2-2\vec{\alpha}\left(3\vec{\beta}\right)+2\vec{\alpha}(2\vec{\gamma})-2\left(3\vec{\beta}\right)(2\vec{\gamma})=$$

$$=\vec{\alpha}^2+9\vec{\beta}^2+4\vec{\gamma}^2-6\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\alpha}\vec{\gamma}-12\vec{\beta}\vec{\gamma}=\vec{\alpha}^2+9\vec{\beta}^2+4\vec{\gamma}^2-2\left(3\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\vec{\gamma}+6\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)=$$

$$=225+9\cdot 9+4\cdot 36-2\cdot 225=450-450=0$$

Άρα $\left|\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}\right|=0\Rightarrow\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$ (1)

β)Από την σχέση που μόλις αποδείξαμε έχουμε :

$$\vec{\alpha}=3\vec{\beta}-2\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{\alpha}^2=\left(3\vec{\beta}-2\vec{\gamma}\right)^2\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2=\left(3\vec{\beta}\right)^2-2\left(3\vec{\beta}\right)(2\vec{\gamma})+(2\vec{\gamma})^2\Rightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2=9\left|\vec{\beta}\right|^2-12\vec{\beta}\vec{\gamma}+4|\vec{\gamma}|^2\Rightarrow 15^2=9\cdot 3^2-12\vec{\beta}\vec{\gamma}+4\cdot 6^2\Rightarrow 225=81-12\vec{\beta}\vec{\gamma}+144$$

Άρα τελικά καταλήγουμε ότι :

$$12\vec{\beta}\vec{\gamma}=81+144-225\Rightarrow 12\vec{\beta}\vec{\gamma}=0\Rightarrow\vec{\beta}\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$$

γ)Η σχέση (1) για τα δεδομένα διανύσματα θέσης γίνεται

$\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$.Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι δύο διανύσματα με αρχή και πέρας αυτά τα τρία σημεία είναι συγγραμμικά. Πράγματι:

$$\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{O\Gamma}$$

$$\overrightarrow{BA}=2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)\Rightarrow\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{\Gamma B}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\parallel\overrightarrow{\Gamma B}$$

Επομένως τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

<u>Ζήτημα 3ο</u> α) Η απόσταση των δύο σημείων είναι

$$(AB)=\sqrt{((2+3t)-(3t-1))^2+\left((5t+1)-(5t+5)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(2+3t-3t+1)^2+(5t+1-5t-5)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

Δηλαδή είναι σταθερή και προφανώς ανεξάρτητη του t.

β)Για να δείξουμε ότι το σημείο Α κινείται πάνω σε μία ευθεία πρέπει από τις συντεταγμένες του να απαλείψουμε την παράμετρο t .Έτσι έχουμε :

$$\left.\begin{matrix}x=2+3t\\ y=1+5t\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x-2=3t\\ y-1=5t\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\dfrac{x-2}{3}=t\\ \dfrac{y-1}{5}=t\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{5}\Rightarrow 5(x-2)=3(y-1)$$

Επομένως το σημείο Α κινείται στην ευθεία $\varepsilon_1:5x-3y-7=0$
Με όμοια διαδικασία βρίσκουμε ότι το σημείο Β κινείται επίσης πάνω σε μία ευθεία με εξίσωση $\varepsilon_2:5x-3y+20=0$

Επειδή $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{5}{3}$ συμπεραίνουμε πως οι δύο ευθείες είναι παράλληλες .

γ)Για να βρούμε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης αρκεί να βρούμε ένα σημείο της μιας και συντελεστής της είναι γνωστός ($\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\lambda_\mu=\frac{5}{3}$).Γνωρίζουμε όμως πως κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα πάνω στις ε_1 και ε_2 έχει το μέσο του πάνω στη μεσοπαράλληλή τους. Θεωρούμε πως το t=0 άρα έχουμε Α(2,1) και Β(-1,5) και το μέσο τους είναι Μ$\left(\frac{2-1}{2},\frac{1+5}{2}\right)$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$y-3=\frac{5}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 3y-9=5x-\frac{5}{2}\Rightarrow 5x-3y+9-\frac{5}{2}=0\Rightarrow 5x-3y+\frac{13}{2}=0$$

δ)Αν θεωρήσουμε πως υπάρχει t_1 τέτοιο ώστε ΑΒ$\perp\varepsilon_1$ και (εννοείται) ΑΒ$\perp\varepsilon_2$ τότε για τα σημεία $A(2+3t_1,5t_1+1)$ και $B\left(3t_1-1,5t_1+5\right)$ έχουμε $\lambda_{AB}=\dfrac{(5t_1+5)-(5t_1+1)}{(3t_1-1)-(2+3t_1)}=\dfrac{5t_1+5-5t_1-1}{3t_1-1-2-3t_1}=\dfrac{4}{-3}$

$\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{AB}=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{20}{9}\neq$ -1.Αρα δεν υπάρχει τέτοια τιμή για το t ώστε ΑΒ$\perp\varepsilon_1$.

ε)Οι ευθείες έχουν εξίσωση $\varepsilon_1 : y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$ και $\varepsilon_2 : y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$
Άρα η απόσταση τους είναι

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\left|\frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{27}{3}}{\sqrt{1+\frac{25}{9}}} = \frac{\frac{27}{3}}{\sqrt{\frac{34}{9}}} = \frac{\frac{27}{3}}{\frac{\sqrt{34}}{3}} = \frac{27}{\sqrt{34}} = \frac{27\sqrt{34}}{34}$$

<u>Ζήτημα 4ο</u> α)Ο C_1 έχει εξίσωση

$C_1 : x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 1 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 1$. Άρα το κέντρο του έχει συντεταγμένες $K_1(-2,0)$ και ακτίνα ρ=1.
Ανάλογα για τον άλλο κύκλο βρίσκουμε ότι έχει εξίσωση
$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 3^2$. Άρα το κέντρο του έχει συντεταγμένες $K_2(2,0)$ και ακτίνα R=3
Επειδή $(K_1K_2) = 2 - (-2) = 4$ και ρ+R=1+3=4 συμπεραίνουμε πως οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β)Προφανώς οι κοινές εξωτερικές εφαπτομένες δεν είναι κατακόρυφες αρα είναι της μορφής $y = \lambda x + \kappa$.Πρέπει να ικανοποιούνται λοιπόν οι συνθήκες

$d(K_1, \varepsilon) = \rho \Rightarrow \frac{|\lambda(-2) - 0 + \kappa|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Rightarrow |-2\lambda + \kappa| = \sqrt{\lambda^2+1}$ (1) και

$d(K_2, \varepsilon) = R = \frac{|\lambda \cdot 2 - 0 + \kappa|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 3 \Rightarrow |2\lambda + \kappa| = 3\sqrt{\lambda^2+1}$ (2) .Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε

$$3|-2\lambda + \kappa| = |2\lambda + \kappa| \Rightarrow 3(-2\lambda + \kappa) = \pm(2\lambda + \kappa) \Rightarrow \begin{cases} -6\lambda + 3\kappa = 2\lambda + \kappa \\ -6\lambda + 3\kappa = -2\lambda - \kappa \end{cases}$$

Άρα κ=4λ ή κ=λ .Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\left.\begin{matrix} |-2\lambda + 4\lambda| = \sqrt{\lambda^2+1} \\ \acute{\eta} \\ |-2\lambda + \lambda| = \sqrt{\lambda^2+1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |2\lambda| = \sqrt{\lambda^2+1} \\ \acute{\eta} \\ |-\lambda| = \sqrt{\lambda^2+1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4\lambda^2 = \lambda^2+1 \\ \eta \\ \lambda^2 = \lambda^2+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 3\lambda^2 = 1 \\ \eta \\ \alpha\delta\upsilon\nu\alpha\tau\eta \end{matrix}$$

Άρα $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ και αντίστοιχα κ=$\pm 4\frac{\sqrt{3}}{3}$ και οι εφαπτομένες έχουν εξίσωση $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο Μ(-4,0)
Τέλος επειδή λ=εφω συμπεραίνουμε πως

$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\phi\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{\omega}_1 = \frac{\pi}{6}$ και $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\phi\omega_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{\omega}_2 = \frac{5\pi}{6}$

Αρα η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες είναι 60°

γ)Αν υποθέσουμε πως ο τρίτος κύκλος εχει κέντρο Κ και ακτίνα r τότε ισχύει ότι: $(\mathrm{KK}_1)=r+\rho$ και $(\mathrm{KK}_2)=r+R$ δηλαδή ισχύει $(KK_2)-(KK_1)=R+r-r-\rho=R-\rho=3-1$=2
Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω σε τμήμα υπερβολής με $\mathrm{E}(2,0),\mathrm{E}'(-2,0)$ $2\alpha=2$ και 2γ=$\mathrm{E}'\mathrm{E}$=4 συνεπώς $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=2^2-1=3$ ενώ η εξίσωσή της είναι C: $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ με εκκεντρότητα ϵ=$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2}{1}=2$

δ)Η έλλειψη έχει $\mathrm{E}(2,0),\mathrm{E}'(-2,0)$ άρα 2γ=4⇒γ=2 και η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ϵ=$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=4$
Αρα $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=4^2-2^2=16-4=12$ και η εξίσωση της έλλειψης είναι $C':\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Επιμέλεια θεμάτων: Κοσμίδης Χρήστος
Χατζηιωαννίδου Χαρίκλεια
Λιόλιος Αντώνης