ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ζήτημα 1ο Α. Αν για τρεις μιγαδικούς αριθμούς ισχύει ότι: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{2004}$ και

$z_1 + z_2 + z_3 = 2004$ να δείξετε ότι: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$.

Β. Έστω $M(w)$ και $P(z)$ οι εικόνες των μιγαδικών $w = a + bi$ και $z = x + yi$. Αν για τους μιγαδικούς w και z ισχύει $zw - w^2 - 2 = 0$ και το σημείο M ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R = 2$ να δείξετε ότι: $a = \frac{2x}{3}$ και $b = 2y$.

Τι συμπέρασμα βγάζουμε για την εικόνα του σημείου P;

Λύση Α. Επειδή

$$|z_1| = \sqrt{2004} \Leftrightarrow |z_1|^2 = 2004 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 2004 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{2004}{z_1}.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι: $\overline{z_2} = \frac{2004}{z_2}, \overline{z_3} = \frac{2004}{z_3}$

Επομένως τότε έχουμε:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{2004}\left(\frac{2004}{z_1} + \frac{2004}{z_2} + \frac{2004}{z_3}\right) = \frac{1}{2004}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right) =$$

$$\frac{1}{2004}\left(\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right) = \frac{1}{2004}\left(\overline{2004}\right) = \frac{1}{2004}2004 = 1$$

Β. Αφού το σημείο M ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R = 2$ ισχύει ότι : $a^2 + b^2 = 4$ και προφανώς $w \neq 0$. Άρα από την

$$zw - w^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow z = w + \frac{2}{w} \Leftrightarrow x + yi = a + bi + \frac{2}{a + bi}$$

$$\Leftrightarrow x + yi = a + bi + \frac{2(a - bi)}{\underbrace{a^2 + b^2}_{4}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x + yi = \frac{3}{2}a + \frac{b}{2}i$$

$$\Rightarrow \left\{ x = \frac{3a}{2} \text{ και } y = \frac{b}{2} \Rightarrow \left\{ a = \frac{2x}{3} \text{ και } b = 2y \right.\right.$$

Επειδή

$$a^2+b^2=4 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2+(2y)^2=4 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{9}+4y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

ο P βρίσκεται πάνω σε έλλειψη.

<u>**Ζήτημα 2º**</u> Εστω f ,συνεχής συνάρτηση με συνεχή πρώτη παραγωγο στο

διάστημα [0,1] και τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f^2(x)dx+\int_0^1 (f'(x))^2dx=f^2(1)-4$$

με f(0)=2.

Α.Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Β.Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)+f'(x)-6}{\sqrt{x+1}-1}$

<u>**Λύση**</u>: **Α** .Αρχικά παρατηρούμε ότι $f^2(0)=2^2=4$ αρα

$$f^2(1)-4=f^2(1)-f^2(0)=\left[f^2(x)\right]_0^1=\int_0^1 (f^2(x))'dx=\int_0^1 2f(x)f'(x)dx$$

Επομένως η αρχική σχέση μπορεί να μετασχηματιστεί στη παρακάτω $\int_0^1 f^2(x)dx+\int_0^1 (f'(x))^2dx-\int_0^1 2f(x)f'(x)dx=0$ δηλαδή

$\int_0^1 (f^2(x)+(f'(x))^2-2f(x)f'(x))dx$ =0 και τελικά $\int_0^1 \left(f(x)-f'(x)\right)^2 dx=0$

.Όμως η συνάρτηση $\left[f(x)-f'(x)\right]^2$ είναι συνεχής και μη αρνητική στο [0,1].

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι θα είναι $f(x)-f'(x)=0$ για κάθε x$\in$ [0,1].

Επομένως έχουμε:

$$f(x)-f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)-f(x)=0 \Rightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0 \Rightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=0$$

Άρα $f(x)e^{-x}=c \Rightarrow f(x)=ce^x$ όμως $f(0)=2 \Rightarrow ce^0=2 \Rightarrow c=2$ δηλ. $f(x)=2e^x$.

Β .Επειδή $f(x)=2e^x$ το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^x\right)^2+\left(2e^x\right)'-6}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}+2e^x-6}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+2e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{8+2}{\frac{1}{2}}=20$$

<u>**Ζήτημα 3º**</u> **Α**. Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο κλειστό διάστημα [α,β] , με g(x)$\neq$0 για α<x<β και g(x) $\neq$g(β) για α<x<β. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο ξ του διαστήματος (α,β),ώστε να έχουμε $\frac{f(\xi)-f(a)}{g(\beta)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Β.α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$,x$\in\mathbb{R}$

β)Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2-x}>\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$

<u>Λύση</u>:**Α**. Αν πάρουμε την προς απόδειξη σχέση και την επεξεργαστούμε κανοντας χιαστί και πράξεις καταλήγουμε στη

$g'(\xi)f(\xi)+g(\xi)f'(\xi)-g'(\xi)f(a)-f'(\xi)g(\beta)=0$

Αυτή η σχέση μας οδηγεί να πάρουμε ως βοηθητική την $\phi(x)=f(x)g(x)-f(a)g(x)-g(\beta)f(x)$ στο διάστημα [α,β]. Η $\phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] άρα και συνεχής .Επίσης

$\phi(\alpha)=f(a)g(a)-f(a)g(a)-g(\beta)f(a)=-g(\beta)f(a)$

$\phi(\beta)=f(\beta)g(\beta)-f(a)g(\beta)-g(\beta)f(\beta)=-f(\alpha)g(\beta)$.Επομένως φ(α)=φ(β) αρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.Δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$ (α,β) τέτοιο ώστε $\phi'(\xi)=0$.Άρα

$$g'(\xi)f(\xi)+g(\xi)f'(\xi)-g'(\xi)f(a)-f'(\xi)g(\beta)=0\Rightarrow\frac{f(\xi)-f(a)}{g(\beta)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Β.α)Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-e^x\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$=\dfrac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{e^x\cdot(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$ Άρα για κάθε x$\in\mathbb{R}$-{1} η παράγωγος είναι θετική.

Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι αύξουσα στο διάστημα (-∞,1] και [1,+∞)

Οπότε η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β)Έχουμε

$$e^{x^2-x}>\frac{x^4+1}{x^2+1}\Leftrightarrow\frac{e^{x^2}}{e^x}>\frac{x^4+1}{x^2+1}\Leftrightarrow\frac{e^{x^2}}{x^4+1}>\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f\left(x^2\right)>f(x)\Leftrightarrow x^2>x\Leftrightarrow x^2-x>0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

<u>Ζήτημα 4^{o}</u> Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο [1,3] με $f(x)\neq 0$ για κάθε x$\in$[1,3].Επίσης δίνεται ο μιγαδικός $z=\dfrac{f(2)}{3\sqrt{3}}+\dfrac{3\sqrt{3}}{f(1)\cdot f(3)}i$ ο οποίος επαληθεύει τη σχέση $|z-1|=|z-i|$.Να αποδείξετε ότι

α) $f(1)f(2)f(3)=27$

β) $f(x)>0$

γ)υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,3):f(x_0)=3$

<u>Λύση</u> Καταρχήν από την ισότητα των μέτρων προκύπτει
$|z-1|=|z-i| \Leftrightarrow |z-1|^2=|z-i|^2 \Leftrightarrow (z-1)\cdot(\overline{z}-1)=(z-i)\cdot(\overline{z}+i) \Leftrightarrow$
$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=z\overline{z}-i\overline{z}+iz+i^2 \Leftrightarrow -(z+\overline{z})=i(z-\overline{z}) \Leftrightarrow -2\operatorname{Re}(z)=i\cdot 2\operatorname{Im}(z)\cdot i$

άρα τελικά ισχύει $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow \dfrac{f(2)}{3\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{f(1)f(3)} \Leftrightarrow f(1)f(2)f(3)=(3\sqrt{3})^2=27$

β)Η συνάρτηση είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο [1,3] αρα πρέπει να διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό το διάστημα .Αν υποθέσουμε πως η $f(x)<0$ τότε πρέπει $f(1)f(2)f(3)<0$ (αφού είναι γινόμενο τριών αρνητικών).Άρα καταλήγουμε σε άτοπο επομένως πρέπει $f(x)>0$

γ)Έπειδή η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα θα ισχύει
$0<f(1)\le f(x)\le f(3)$ για κάθε x∈[1,3].Έπομένως παίρνουμε για x=1ή2ή3

$\begin{cases} 0<f(1)=f(1)<f(3) \\ 0<f(1)<f(2)<f(3) \\ 0<f(1)<f(3)=f(3) \end{cases}$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$0<f^3(1)<f(1)f(2)f(3)<f^3(3) \Leftrightarrow 0<f^3(1)<27<f^3(3)$ άρα
$\sqrt[3]{f^3(1)}<\sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{f^3(3)} \Leftrightarrow f(1)<3<f(3)$.Η τελευταία σχέση δηλώνει πώς το 3 βρίσκεται ανάμεσα στις 2 τιμές της συνεχούς συνάρτησης στο [1,3].Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,3): f(x_0)=3$

<u>Προτεινόμενα θέματα</u> 1.Δίνεται η συνάρτηση f,για την οποία ισχύει $\left|f(x)-e^x\right|\le x^2$ για κάθε x $\in\mathbb{R}$.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=0$

2.Έστω P(x) πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού.
Α)Να βρείτε το P(x) αν $P''(x)=4, και\ \ P(x)-\dfrac{x}{2}P'(x)+P''(x)=0$
Β)Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν πολυώνυμα $2^{ου}$ βαθμού ώστε να ισχύει $P(x)=\ln x$,x>0

3.Αν $H=\left\{z\in\mathbb{C}:\left||z+3+i|-|z-2+i|\right|=4\right\}$ περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο.

4.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a-1}{4}x^3+\dfrac{\beta-\gamma}{3}x^2+\dfrac{\gamma}{3}x+\delta$, με α,β,γ,δ $\in\mathbb{R}$ με α≠1.Αν 3α+4β=3 να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο $(x_0,f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x'x.

Επιμέλεια θεμάτων: Κοσμίδης Χρήστος
Χατζηιωαννίδου Χαρίκλεια
Λιόλιος Αντώνης