ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - x\ln x + x - 1, x > 0$.

i) Να μελετήσετε την μονοτονία της f και να βρείτε τα τοπικά ακρότατά της.

ii) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (1,2)$.

Β. α) Να αποδειχθεί ότι $(x-1)e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

i) Βρείτε την παράγωγο της f.

ii) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, 0 < \alpha < \beta$, τέτοια ώστε για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = a + if(a)$ και $z_2 = \beta + if(\beta)$ να ισχύει $w = \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

α) Ν.δ.ο $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$

β) Ν.δ.ο ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle για την συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Ν.δ.ο υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim_{x \to a} \int_a^x \dfrac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)} dt = 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει λύση στο (α,β).

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\left[f'(x) - f(x)\right](x^2+1) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ της οποίας η C_f έχει στο $A(0, f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -x + 3$.

α) Ν.δ.ο $f(x) = (x^2+1)e^x, x \in \mathbb{R}$.

β) Ν.δ.ο η (ε) και η C_f δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.

γ) Έστω $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx, t \geq 0$. Βρείτε το $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{g'(t)}{e^{2t}}$.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = a,\ a > 0$

<u>**ΛΥΣΕΙΣ**</u>

<u>ΘΕΜΑ 1^ο^</u> : Α.

i) Είναι $f'(x) = ... = \dfrac{(2-x)\ln x}{x}$.

x	0		1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	τ.ε f(1)=0	$\nearrow$	τ.μ f(2)=(ln2-1)2	$\searrow$	

ii) $f''(x) = ... = \dfrac{2-x-2\ln x}{x^2}$

θεωρώ $h(x) = 2-x-2\ln x$

- h συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{matrix} h(1)=1>0 \\ h(2)=-2\ln 2<0 \end{matrix}\right\} h(1)h(2)<0$

Σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ ώστε $h(x_0)=0$ δηλαδή $f''(x_0)=0$.

Ακόμη, $h'(x) = -1-\dfrac{2}{x} < 0$ άρα h γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

- Για $x<x_0 \Rightarrow h(x)>h(x_0) \Rightarrow h(x)>0 \Rightarrow f''(x)>0$
- Για $x>x_0 \Rightarrow h(x)<h(x_0) \Rightarrow h(x)<0 \Rightarrow f''(x)<0$.

Άρα το $(x_0, f(x_0))$ μοναδικό σημείο καμπής.

Β. α) Θεωρώ $g(x) = (x-1)e^x+1, x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = ... = xe^x$.

- Για $x<0, g'(x)<0, g \searrow, g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0$
- Για $x>0, g'(x)>0, g \nearrow, g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}^* : g(x)>0 \Rightarrow (x-1)e^x+1>0$.

β) i) Για $x\neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$, παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = ... = \dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$.

$$\text{Στο } x_0=0: \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}, x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, x=0 \end{cases}$$

ii) Επειδή f παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 2^Ο^

α)

$$|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2| \Leftrightarrow |z_1 + iz_2|^2 = |z_1 - iz_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + iz_2)(\overline{z_1} - i\overline{z_2}) = (z_1 - iz_2)(\overline{z_1} + i\overline{z_2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2i(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \overline{w} \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$, ισχύει.

β) g παραγωγίσιμη στο [α, β] ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- g συνεχής στο [α, β] ως παραγωγίσιμη.
- g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$
- $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$
- $g(\beta) = \dfrac{f(\beta)}{\beta}$

και επειδή $w \in \mathbb{R}$:

$$w = \frac{\alpha + if(\alpha)}{\beta + if(\beta)} = \frac{\alpha \bullet \beta + f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)}$$

άρα $\beta f(\alpha) = \alpha f(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$

άρα ισχύει το Θ.Rolle.

γ) Αν $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ για να διέρχεται από το Ο(0,0) πρέπει : $-f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$, που ισχύει γιατί σύμφωνα με το Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in$ (α, β) ώστε: $g'(x_0) = 0$.

δ) Έστω $h(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f(x + a - t)}{(x - a)(x + a - t)} dt = \frac{1}{x - a} \int_a^x \frac{f(x + a - t)}{x + a - t} dt$

Θέτω: $u = x + a - t$, $du = -dt$ ή $dt = -du$

Για $t = a, u_1 = x$

$t = x, u_2 = a$

Άρα :

$$\int_a^x \frac{f(x + a - t)}{x + a - t} dt = -\int_x^a \frac{f(u)}{u} du = \int_a^x \frac{f(u)}{u} du = \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt}{x-a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a}\frac{(\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt)'}{(x-a)'} = = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a}$$

Άρα: $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ οπότε $\frac{f(\beta)}{\beta} = 1 \Leftrightarrow f(\beta) = \beta$.

- Η f στο[α, β] συνεχής ως παραγωγίσιμη.
- Η f στο (α, β) παραγωγίσιμη.
- Θ.Μ.Τ : υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈ (α, β) ώστε

  f'(ξ)=$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 1$ άρα η $f'(x) = 1$ έχει λύση στο (α, β).

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

α) $[f'(x) - f(x)](x^2+1) = 2xf(x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (\frac{f(x)}{x^2+1})' = \frac{f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x^2+1} = c.e^x \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} f(x)=c.e^x(x^2+1) \\ f'(0)=1 \Leftrightarrow c=1 \end{matrix}\right\} f(x) = e^x(x^2+1)$$

β) Έστω $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow f(x) + x - 3 = 0$ έχει 2 λύσεις, $P_1 < P_2$.

- Θεωρώ: $h(x) = f(x) + x - 3$ στο $[P_1, P_2]$
- h παραγωγίσιμη στο $[P_1, P_2]$ με $h'(x) = f'(x) + 1$
- $h(P_1) = h(P_2) = 0$

  Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ (P_1, P_2) ώστε

  $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}(\xi+1)^2 = -1$,ΑΤΟΠΟ.

  γ) $g'(t) = f(t)$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+1}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t} = 0$$

δ) Είναι $f(x) = e^x(x^2+1) > 0$

$$E(\Omega) = \int_0^a e^x(x^2+1)dx = [e^x(x^2+1)]_0^a - 2\int_0^a xe^x =$$

$$= e^a(a^2+1) - 2[xe^x]_0^a + 2\int_0^a e^x dx =$$

$$= e^a(a^2+1) - 2ae^a + 2[e^x]_0^a = e^a(a-1)^2 + 2(e^a - 1)$$

Επιμέλεια: Ταρασίδης Ιωάννης
Μπακαλάκος Κωνσταντίνος
Λιόλιος Αντώνιος