ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια: Ταρασίδης Κ. Ιωάννης
Λιόλιος Ν. Αντώνιος

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και το πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x'x και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$, $x=1$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x - x\ln x + x - 1$, $x>0$.

i) Να μελετήσετε την μονοτονία της f και να βρείτε τα τοπικά ακρότατά της.

ii) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$ με $x_0\in$ (1,2).

Β. α) Να αποδειχθεί ότι $(x-1)e^x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

i) Βρείτε την παράγωγο της f.

ii) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$, $0<\alpha<\beta$, τέτοια ώστε για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=a+if(a)$ και $z_2=\beta+if(\beta)$ να ισχύει $w=\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

α) Ν.δ.ο $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$

β) Ν.δ.ο ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle για την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο $[a,\beta]$.

γ) Ν.δ.ο υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim_{x\to a}\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt = 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει λύση στο (a,β).

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $[f'(x)-f(x)](x^2+1)=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ της οποίας η C_f έχει στο $A(0,f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-x+3$.

α) Ν.δ.ο $f(x)=(x^2+1)e^x, x\in\mathbb{R}$

β) Ν.δ.ο η (ε) και η C_f δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία

γ) Έστω $g(t)=\int_0^t f(x)dx, t\geq 0$. Βρείτε το $\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}}$.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=a$, $a>0$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Α) Παρατηρούμε ότι $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\varepsilon\mathbb{R}$ άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $f(1)=\int_1^1\frac{1}{1+t^2}dt=0$

Οπότε για x<1 η f(x)<f(1)=0
για x>1 η f(x)>f(1)=0

Δηλαδή f(x)<0 για κάθε x<1
f(x)>0 για κάθε x>1
f(x)=0 για κάθε x=1

Β) Έστω $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_{1}^{x}\frac{1}{1+t^2}dt+\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}dt, x>0$ με

$$g'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Οπότε $g\left(x\right)$ σταθερή με $g\left(1\right)=f\left(1\right)+f\left(1\right)=0$

Άρα g(x)=0 για κάθε x>0 δηλαδή $f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Γ) Από τα Α ερωτήματα $f\left(x\right)\le 0$ για $x\varepsilon\left[0,1\right]$ οπότε

$$E=-\int_{0}^{1}f\left(x\right)dx=-\int_{0}^{1}\left(x\right)'f\left(x\right)dx=-\left[xf\left(x\right)\right]_0^1+\int_{0}^{1}xf'\left(x\right)dx=0$$

$$+\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> : Α.

i) Είναι $f'(x)=...=\frac{(2-x)\ln x}{x}$.

x		0		1		2		$+\infty$
$2-x$	//////		+		+	0	−	
$\ln x$	//////		−	0	+		+	
f'	//////		−	0	+	0	−	
f			↘	τ.ε f(1)=0	↗	τ.μ f(2)=(ln2-1)2	↘	

ii) $f''(x)=...=\frac{2-x-2\ln x}{x^2}$

θεωρώ $h(x)=2-x-2\ln x$

- h συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{matrix} h(1)=1>0 \\ h(2)=-2\ln 2<0 \end{matrix}\right\} h(1)h(2)<0$

Σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ ώστε $h(x_0)=0$ δηλαδή $f''(x_0)=0$.

Ακόμη, $h'(x)=-1-\frac{2}{x}<0$ άρα h γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

- Για $x<x_0\Rightarrow h(x)>h(x_0)\Rightarrow h(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$
- Για $x>x_0\Rightarrow h(x)<h(x_0)\Rightarrow h(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$.

Άρα το $(x_0,f(x_0))$ μοναδικό σημείο καμπής.

Β. α) Θεωρώ $g(x)=(x-1)e^{x}+1, x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=...=xe^{x}$.

- Για $x<0, g'(x)<0, g \searrow, g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0$
- Για $x>0, g'(x)>0, g \nearrow, g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}^{*}: g(x)>0\Rightarrow (x-1)e^{x}+1>0$.

β) i) Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}$, παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=...=\dfrac{(x-1)e^{x}+1}{x^{2}}$.

$$\text{Στο } x_0=0: \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x}-1}{x}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1-x}{x^{2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{2}=\frac{1}{2}=f'(0)$$

$$\text{Άρα } f'(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)e^{x}+1}{x^{2}}, x\neq 0\\ \frac{1}{2}, x=0\end{cases}$$

ii) Επειδή f παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

α)

$$|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|\Leftrightarrow |z_1+iz_2|^{2}=|z_1-iz_2|^{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1+iz_2)(\overline{z_1}-i\overline{z_2})=(z_1-iz_2)(\overline{z_1}+i\overline{z_2})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2i(\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2})=0\Leftrightarrow \overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}, \text{ ισχύει.}$$

β) g παραγωγίσιμη στο [α, β] ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- g συνεχής στο [α, β] ως παραγωγίσιμη.
- g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^{2}}$
- $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$
- $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$

και επειδή $w\in\mathbb{R}$:

$$w=\frac{\alpha+if(\alpha)}{\beta+if(\beta)}=\frac{\alpha\bullet\beta+f(\alpha)f(\beta)}{\beta^{2}+f^{2}(\beta)}+\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta^{2}+f^{2}(\beta)}$$

άρα $\beta f(\alpha)=\alpha f(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow g(\alpha)=g(\beta)$

άρα ισχύει το Θ.Rolle.

γ) Αν $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ για να διέρχεται από το Ο(0,0) πρέπει : $-f(x_0)=-x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0)-f(x_0)=0$, που ισχύει γιατί σύμφωνα με το Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in$ (α, β) ώστε: $g'(x_0)=0$.

δ) Έστω $h(x)=\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt=\frac{1}{x-a}\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{x+a-t}dt$

Θέτω: $u=x+a-t$, $du=-dt$ ή $dt=-du$

Για $t=a, u_1=x$

$t=x, u_2=a$

Άρα :

$$\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{x+a-t}dt=-\int_x^a \frac{f(u)}{u}du=\int_a^x \frac{f(u)}{u}du=\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt$$

$$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt}{x-a}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to a}\frac{\left(\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt\right)'}{(x-a)'}==\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}=\frac{f(a)}{a}$$

Άρα: $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=1 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$ οπότε $\frac{f(\beta)}{\beta}=1 \Leftrightarrow f(\beta)=\beta$.

- Η f στο[α, β] συνεχής ως παραγωγίσιμη.
- Η f στο (α, β) παραγωγίσιμη.
- Θ.Μ.Τ : υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈ (α, β) ώστε

  $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=1$ άρα η $f'(x)=1$ έχει λύση στο (α, β).

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α) $[f'(x)-f(x)](x^2+1)=2xf(x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)'=\frac{f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x^2+1}=c.e^x \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=c.e^x(x^2+1) \\ f'(0)=1 \Leftrightarrow c=1 \end{array}\right\} f(x)=e^x(x^2+1)$$

β) Έστω $f(x)-y=0 \Leftrightarrow f(x)+x-3=0$ έχει 2 λύσεις, $P_1<P_2$.

- Θεωρώ: $h(x)=f(x)+x-3$ στο $[P_1,P_2]$
- h παραγωγίσιμη στο $[P_1,P_2]$ με $h'(x)=f'(x)+1$
- $h(P_1)=h(P_2)=0$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (P_1, P_2)$ ώστε

$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}(\xi + 1)^2 = -1$,ΑΤΟΠΟ.

γ) $g'(t) = f(t)$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g'(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2+1}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{e^t} = 0$$

δ) Είναι $f(x) = e^x(x^2+1) > 0$

$$E(\Omega) = \int_0^a e^x(x^2+1)dx = [e^x(x^2+1)]_0^a - 2\int_0^a xe^x =$$

$$= e^a(a^2+1) - 1 - 2[xe^x]_0^a + 2\int_0^a e^x dx =$$

$$= e^a(a^2+1) - 1 - 2ae^a + 2[e^x]_0^a = e^a(a-1)^2 + 2e^{\alpha} - 3$$