Κάθε Παρασκευή το επιστημονικό επιτελείο του φροντιστηρίου “ΕΝΑ” θα δημοσιεύει πρωτότυπα προτεινόμενα θέματα για την προετοιμασία των υποψηφίων της Γ ' Λυκείου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x - x\ln x + x - 1, x>0$.

i) Να μελετήσετε την μονοτονία της f και να βρείτε τα τοπικά ακρότατά της.

ii) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (1,2)$.

Β. α) Να αποδειχθεί ότι $(x-1)e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$.

i) Βρείτε την παράγωγο της f.

ii) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}, 0<\alpha<\beta$, τέτοια ώστε για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = a + if(a)$ και $z_2 = \beta + if(\beta)$ να ισχύει $w = \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

α) Ν.δ.ο $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$

β) Ν.δ.ο ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle για την συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Ν.δ.ο υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to a} \int_a^x \dfrac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει λύση στο (α,β).

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\left[f'(x) - f(x)\right](x^2+1) = 2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ της οποίας η C_f έχει στο $A(0, f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -x+3$.

α) Ν.δ.ο $f(x) = (x^2+1)e^x, x\in\mathbb{R}$.

β) Ν.δ.ο η (ε) και η C_f δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.

γ) Έστω $g(t) = \int_0^t f(x)dx, t\geq 0$. Βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{g'(t)}{e^{2t}}$.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=a$, $a>0$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1°</u> : Α.

i) Είναι $f'(x)=...=\dfrac{(2-x)\ln x}{x}$.

x	0		1		2		$+\infty$
$2-x$		+		+	0	−	
$\ln x$		−	0	+		+	
f'		−	0	+	0	−	
f		↘	τ.ε f(1)=0	↗	τ.μ f(2)=(ln2-1)2	↘	

ii) $f''(x)=...=\dfrac{2-x-2\ln x}{x^2}$

θεωρώ $h(x)=2-x-2\ln x$

- h συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{matrix} h(1)=1>0 \\ h(2)=-2\ln 2<0 \end{matrix}\right\} h(1)h(2)<0$

Σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ ώστε $h(x_0)=0$ δηλαδή $f''(x_0)=0$.

Ακόμη, $h'(x)=-1-\dfrac{2}{x}<0$ άρα h γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

- Για $x<x_0\Rightarrow h(x)>h(x_0)\Rightarrow h(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$
- Για $x>x_0\Rightarrow h(x)<h(x_0)\Rightarrow h(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$.

Άρα το $(x_0, f(x_0))$ μοναδικό σημείο καμπής.

Β. α) Θεωρώ $g(x)=(x-1)e^x+1, x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=...=xe^x$.

- Για $x<0, g'(x)<0, g \searrow, g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0$
- Για $x>0, g'(x)>0, g \nearrow, g(x)>g(0)\Rightarrow g(x)>0$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}^*: g(x)>0\Rightarrow(x-1)e^x+1>0$.

β) i) Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$, παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=...=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$.

$$\text{Στο } x_0=0: \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}=f'(0)$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}, x\neq 0\\ \frac{1}{2}, x=0\end{cases}$

ii) Επειδή f παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα.

<u>ΘΕΜΑ 2^{O}</u>

α)

$$|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|\Leftrightarrow|z_1+iz_2|^2=|z_1-iz_2|^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(z_1+iz_2)(\overline{z_1}-i\overline{z_2})=(z_1-iz_2)(\overline{z_1}+i\overline{z_2})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2i(\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2})=0\Leftrightarrow\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}\text{, ισχύει.}$$

β) g παραγωγίσιμη στο [α, β] ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- g συνεχής στο [α, β] ως παραγωγίσιμη.
- g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
- $g(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$
- $g(\beta)=\frac{f(\beta)}{\beta}$

και επειδή $w\in\mathbb{R}$:

$$w=\frac{\alpha+if(\alpha)}{\beta+if(\beta)}=\frac{\alpha\bullet\beta+f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}+\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}$$

άρα $\beta f(\alpha)=\alpha f(\beta)\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}\Leftrightarrow g(\alpha)=g(\beta)$

άρα ισχύει το Θ.Rolle.

γ) Αν $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ για να διέρχεται από το Ο(0,0) πρέπει : $-f(x_0)=-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$, που ισχύει γιατί σύμφωνα με το Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in$(α, β) ώστε: $g'(x_0)=0$.

δ) Έστω $h(x)=\int_a^x\frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt=\frac{1}{x-a}\int_a^x\frac{f(x+a-t)}{x+a-t}dt$

Θέτω: $u=x+a-t$, $du=-dt$ ή $dt=-du$

Για $t=a, u_1=x$

$t=x, u_1=a$

Άρα :

$$\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{x+a-t}\,dt = -\int_x^a \frac{f(u)}{u}\,du = \int_a^x \frac{f(u)}{u}\,du = \int_a^x \frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} \quad \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt}{x-a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a}\frac{(\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt)'}{(x-a)'} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a}$$

Άρα: $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ οπότε $\frac{f(\beta)}{\beta} = 1 \Leftrightarrow f(\beta) = \beta$.

- Η f στο[α, β] συνεχής ως παραγωγίσιμη.
- Η f στο (α, β) παραγωγίσιμη.
- Θ.Μ.Τ : υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$ (α, β) ώστε

  f'(ξ)=$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 1$ άρα η $f'(x) = 1$ έχει λύση στο (α, β).

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

α) $[f'(x) - f(x)](x^2+1) = 2xf(x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (\frac{f(x)}{x^2+1})' = \frac{f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x^2+1} = c.e^x \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} f(x)=c.e^x(x^2+1) \\ f'(0)=1 \Leftrightarrow c=1 \end{matrix}\right\} f(x) = e^x(x^2+1)$$

β) Έστω $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow f(x) + x - 3 = 0$ έχει 2 λύσεις, $P_1 < P_2$.

- Θεωρώ: $h(x) = f(x) + x - 3$ στο $[P_1, P_2]$
- h παραγωγίσιμη στο $[P_1, P_2]$ με $h'(x) = f'(x) + 1$
- $h(P_1) = h(P_2) = 0$

  Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ$\in (P_1, P_2)$ ώστε

  $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}(\xi+1)^2 = -1$,ΑΤΟΠΟ.

  γ) $g'(t) = f(t)$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+1}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t} = 0$$

δ) Είναι $f(x) = e^x(x^2+1) > 0$

$$E(\Omega) = \int_0^a e^x(x^2+1)dx = [e^x(x^2+1)]_0^a - 2\int_0^a xe^x =$$

$$= e^a(a^2+1) - 1 - 2[xe^x]_0^a + 2\int_0^a e^x dx =$$

$$= e^a(a^2+1) - 1 - 2ae^a + 2[e^x]_0^a = e^a(a-1)^2 + 2(e^a - 1) - 1 \text{ τ.μ.}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε ότι:

α) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}$

β) $0 < x \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1$

2. Εξηγήστε λεπτομερώς γιατί δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = 1 - |1 - x|, x \in [0,2]$.

3.α) Αν της $f : (0,+\infty) \to R$ υπάρχει η $f' : (0,+\infty) \to R$ με $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, να αποδειχθεί τότε ότι ισχύει: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, για $g : (0,+\infty) \to R$ με $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

β) Να υπολογισθεί το $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + εφx)dx$.

4. Για ποια τιμή της παραμέτρου α η $f(x) = \frac{x^2 - αx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ έχει ασύμπτωτη τη $y = x - 3$ στο $+\infty$. Στη συνέχεια να μελετηθεί η f και να βρείτε το πλήθος των ριζών της $f(x) = μ, μ \in R$.

5. Έστω f/Δ δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ με τα κοίλα άνω.

α) Να δείξετε ότι: $\forall x_1, x_2 \in Δ$ με $x_1 < x_2$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

β) Να δείξετε ότι: $e^{\frac{α+β}{2}} \le \frac{e^α + e^β}{2}$

6. Δίνεται η f συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Δείξτε ότι υπάρχει $ξ \in (α, β)$ με $3ξ^2 \frac{f(β) - f(α)}{β^3 - α^3} = f'(ξ)$

7. Δείξε ότι $f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = \int_{x-1}^{x}\left(\int_y^{y+1} f''(t)dt\right)dy$

8. Αν f / [α, β] συνεχής με μ, Μ μέγιστη και ελάχιστη τιμή με $f(x) > 0$ δείξτε:

$$\frac{μ}{M}(β - α)^2 \le \int_α^β f(x)dx \int_α^β \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{M}{μ}(β - α)^2$$

9.Για κάθε $x>2$, να δείξετε ότι: $(x+1)συν\left(\dfrac{π}{x+1}\right)-xσυν\dfrac{π}{x}>1$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΛΙΟΛΙΟΣ ΑΝΤΩΝΗΣ
ΣΙΑΣΙΟΥ ΜΑΡΙΑ
ΧΑΤΖΗΝΑΚΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ