

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $[\alpha, \beta]$ με $f'' > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και έστω η

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt - (x-a) \cdot f\left(\frac{x+a}{2}\right), x \in [\alpha, \beta]$$

α) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\frac{1}{2} f'(\xi)(x-\alpha) = f(x) - f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$

β) Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Δείξτε ότι: $\int_a^\beta f(t) dt > (\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

B. Αν $0 < \alpha, \beta < 1$, τότε: $\alpha^\beta + \beta^\alpha > 1$.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $[f'(x) - f(x)](x^2 + 1) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ της οποίας η C_f έχει στο $A(0, f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = -x + 3$.

α) Ν.δ.ο $f(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$.

β) Ν.δ.ο η (ε) και η C_f δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.

γ) Έστω $g(t) = \int_0^t f(x) dx, t \geq 0$. Βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g'(t)}{e^{2t}}$.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x -αξονα και τις ευθείες $x=0, x=a, a > 0$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$, τέτοια ώστε για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \alpha + if(\alpha)$ και

$$z_2 = \beta + if(\beta) \text{ να ισχύει } w = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}.$$

α) Ν.δ.ο $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$

β) Ν.δ.ο ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle για την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[\alpha, \beta]$.

γ) Ν.δ.ο υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} \int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)} dt$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει λύση στο (α, β) .

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.α) Έχουμε ότι: $\frac{x+a}{2} \in [\alpha, \beta]$ και $\chi \in [a, \beta]$ και $x > \frac{x+a}{2}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ θα ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[\frac{x+a}{2}, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\frac{x+a}{2}, x)$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - \frac{x+a}{2}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{1}{2} f'(\xi)(\chi - \alpha) = f(\chi) - f\left(\frac{\alpha + \chi}{2}\right)$$

β) Η f είναι συνεχής και η $\int_a^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Επίσης η $(x-a) \cdot f\left(\frac{x+a}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

$$g'(x) = f(x) - f\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{1}{2}(x-a) \cdot f'\left(\frac{x+a}{2}\right) \text{ άρα:}$$

$$g'(x) = f'(\xi) \cdot \frac{1}{2}(x-a) - \frac{1}{2}(x-a) \cdot f'\left(\frac{x+a}{2}\right) \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(x-a) \cdot \left[f'(\xi) - f'\left(\frac{x+a}{2}\right) \right]$$

Επειδή η $f''(x) > 0$ τότε η $f'(x) \nearrow$ στο $[a, \beta]$ άρα:

$$\xi > \frac{x+a}{2} \Rightarrow f'(\xi) > f'\left(\frac{x+a}{2}\right) \text{ και επειδή } x > a \text{ τότε } g'(x) > 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in (a, \beta)$. Οπότε η g είναι \nearrow στο $[\alpha, \beta]$.

Η g θα έχει ελάχιστο για $x=a$ το $g(a)=0$ και μέγιστο το

$$g(\beta) = \int_a^\beta f(t) dt - (\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right).$$

γ) Επειδή η g είναι \nearrow στο $[\alpha, \beta]$ θα έχουμε

$$\beta > \alpha \Rightarrow g(\beta) > g(a) \Rightarrow \int_a^\beta f(t) dt = (\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{a + \beta}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(t) dt > (\beta - \alpha) f\left(\frac{a + \beta}{2}\right)$$

B. Θεωρώ τη συνάρτηση: $f(x) = x^\lambda - \lambda x$, $0 < \lambda < 1$, $x > 0$.

Είναι: $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1} - \lambda = \lambda(x^{\lambda-1} - 1)$. Επομένως για $x > 1$, η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή λοιπόν $0 < \alpha, \beta < 1$, θα είναι :

$\frac{1}{\alpha} > 1$, $\frac{1}{\beta} > 1$. Συνεπώς επειδή εκεί η f γνησίως φθίνουσα, θα είναι

και: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < f(1)$, και $f\left(\frac{1}{\beta}\right) < f(1)$.

$$\frac{1}{\alpha^\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha} < 1 - \lambda, \text{ και για } \lambda = \beta:$$

$$\text{Συνεπώς: } \frac{1}{\alpha^\beta} - \frac{\beta}{\alpha} < 1 - \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha^\beta} < 1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\alpha^\beta > \frac{\alpha + \beta - \alpha\beta}{\alpha} \quad (1)$$

Αν επαναλάβω συμμετρικά θέτοντας όπου $\lambda = \beta$, καταλήγω όμοια:

$$\beta^\alpha > \frac{\alpha + \beta - \alpha\beta}{\beta} \quad (2)$$

Από (1),(2) με πρόσθεση: $\alpha^\beta + \beta^\alpha > \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}$.

Όμως: $\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} > 1$, με συνέπεια και: $\alpha^\beta + \beta^\alpha > 1$

ΘΕΜΑ 2ο

α) $[f'(x) - f(x)](x^2 + 1) = 2xf(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2 + 1}\right)' = \frac{f(x)}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = c \cdot e^x &\Leftrightarrow \frac{f(x) = c \cdot e^x (x^2 + 1)}{f'(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1} \right\} f(x) = e^x (x^2 + 1) \end{aligned}$$

β) Έστω $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow f(x) + x - 3 = 0$ έχει 2 λύσεις, $P_1 < P_2$.

- Θεωρώ: $h(x) = f(x) + x - 3$ στο $[P_1, P_2]$
- h παραγωγίσιμη στο $[P_1, P_2]$ με $h'(x) = f'(x) + 1$
- $h(P_1) = h(P_2) = 0$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (P_1, P_2)$ ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\xi (\xi + 1)^2 = -1, \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

γ) $g'(t) = f(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g'(t)}{e^{2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{e^{2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 1}{e^t} \stackrel{\infty}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{e^t} \stackrel{\infty}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^t} = 0$$

δ) Είναι $f(x) = e^x (x^2 + 1) > 0$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^a e^x (x^2 + 1) dx = [e^x (x^2 + 1)]_0^a - 2 \int_0^a x e^x dx = \\ &= e^a (a^2 + 1) - 2[xe^x]_0^a + 2 \int_0^a e^x dx = \\ &= e^a (a^2 + 1) - 2ae^a + 2[e^x]_0^a = e^a (a - 1)^2 + 2(e^a - 1). \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$$\begin{aligned} |z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2| &\Leftrightarrow |z_1 + iz_2|^2 = |z_1 - iz_2|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z_1 + iz_2)(\overline{z_1 - iz_2}) &= (z_1 - iz_2)(\overline{z_1 + iz_2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2i(\overline{z_1 z_2} - z_1 \overline{z_2}) = 0 &\Leftrightarrow \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_2} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow w = \bar{w} \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}, \text{ ισχύει.}$$

β) g παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως παραγωγίσιμη.
- g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$
- $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$
- $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta}$

και επειδή $w \in \mathbb{R}$:

$$w = \frac{\alpha + if(\alpha)}{\beta + if(\beta)} = \frac{\alpha \cdot \beta + f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)}$$

$$\text{άρα } \beta f(\alpha) = \alpha f(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

άρα ισχύει το Θ .Rolle.

γ) Αν $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ για να διέρχεται από το $O(0,0)$ πρέπει:

$-f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$, που ισχύει γιατί σύμφωνα με το Θ .Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $g'(x_0) = 0$.

$$\delta) \text{ Έστω } h(x) = \int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)} dt = \frac{1}{x-a} \int_a^x \frac{f(x+a-t)}{x+a-t} dt$$

$$\Theta \acute{\epsilon} \tau \omega: u = x + a - t, du = -dt \text{ ή } dt = -du$$

$$\Gamma \iota \alpha \quad t = a, u_1 = x$$

$$t = x, u_1 = a$$

Άρα:

$$\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{x+a-t} dt = - \int_x^a \frac{f(u)}{u} du = \int_a^x \frac{f(u)}{u} du = \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει: $(z + \bar{z}) \left[\frac{1}{4}(z^2 + \bar{z}^2) + \frac{i}{2}(|z|^2 + 4) \right] = \bar{z} - z$.

α) Να παραστήσετε γραφικά το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του αριθμού z στο επίπεδο.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z , αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός $w = \frac{3}{2}(z + \bar{z})^2 + i(z - \bar{z}) + 2i$ είναι φανταστικός.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των προηγούμενων γεωμετρικών τόπων.

2. Στο σύστημα των αξόνων θεωρούμε τα σημεία $A(0,5), B(0,3)$ και $\Gamma(\chi, 2)$ με $\chi > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γωνίας ω , με την οποία φαίνεται από το σημείο Γ το τμήμα AB , δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

β) Για ποία τιμή του χ η γωνία ω γίνεται μέγιστη και πόση?

γ) Αν το σημείο Γ κινείται έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής του χ να είναι $\frac{dx}{dt} = 2$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $\chi = 2$.

3. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = (x^2 + 1)e^{mx}$, για κάθε πραγματικό x , τότε Δείξτε ότι: α) η f αντιστρέφεται και β) ότι: $\int_0^x f(t)dt + \int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$, για κάθε x πραγματικό.

4. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = (x^2 + 1)e^{mx}$, για κάθε πραγματικό x , τότε Δείξτε ότι: α) η f αντιστρέφεται και β) ότι: $\int_0^x f(t)dt + \int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$, για κάθε x πραγματικό.

*ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ: ΛΙΟΛΙΟΣ ΑΝΤ.-ΧΑΤΖΗΝΑΚΟΣ ΧΡ.-ΧΟΡΤΗΣ Φ.
ΣΙΑΣΙΟΥ Μ.-ΧΑΛΒΑΤΖΗ ΕΛ.-ΛΑΦΑΖΑΝΙΔΟΥ Α.
ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Μ.*