ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(1+x)^{\alpha}-2^{\alpha-1}(1+x^{\alpha})$ με $x\geq 0$ και $\alpha\geq 1$.

I. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία που να βρίσκονται πάνω από τον άξονα x’x.
II. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\geq 0$ και $\alpha\geq 1$ ισχύει η σχέση: $(1+x)^{\alpha}\leq 2^{\alpha-1}(1+x^{\alpha})$. Πότε ισχύει η ισότητα;
III. Να αποδείξετε ότι $|\kappa+\lambda|^{\alpha}\leq 2^{\alpha-1}(|\kappa|^{\alpha}+|\lambda|^{\alpha})$, όπου $\alpha\geq 1$ και κ,λ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $[\alpha,\beta]$ με f''$\succ 0$ για κάθε $\chi\in[a,\beta]$ και έστω η

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt-(x-a)\cdot f\left(\frac{x+a}{2}\right),x\in[\alpha,\beta]$$

α) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)\,\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\,\frac{1}{2}f'(\xi)(\chi-\alpha)=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)$

β) Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Δείξτε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\succ(\beta-\alpha)\cdot f(\frac{\alpha+\beta}{2})$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $[f'(x)-f(x)](x^2+1)=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ της οποίας η C_f έχει στο $A(0,f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-x+3$.

α) Ν.δ.ο $f(x)=(x^2+1)e^x, x\in\mathbb{R}$.

β) Ν.δ.ο η (ε) και η C_f δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.

γ) Έστω $g(t)=\int_0^t f(x)dx, t\geq 0$. Βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}}$.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=a,\ a>0$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}, 0<\alpha<\beta$, τέτοια ώστε για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=a+if(a)$ και $z_2=\beta+if(\beta)$ να ισχύει $w=\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

α) Ν.δ.ο $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$

β) Ν.δ.ο ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle για την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Ν.δ.ο υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to a}\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει λύση στο (α,β).

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

I. Αν α=1, τότε $f(x)=(1+x)^1-2^{1-1}(1+x)=1+x-1-x=0$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της f ταυτίζεται με τον άξονα x'x όταν α=0.
Αν α$\neq$1, τότε για α>1 και x>0 είναι $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-2^{\alpha-1}\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}=\alpha((1+x)^{\alpha-1}-(2x)^{\alpha-1})$ οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow(1+x)^{\alpha-1}-(2x)^{\alpha-1}=0\Leftrightarrow(1+x)^{\alpha-1}=(2x)^{\alpha-1}\Leftrightarrow1+x=2x\Leftrightarrow x=1$
Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	

τ.μ.

Είναι φανερό ότι η f παρουσιάζει στο $x=1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1)=0$ και στο $x=0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(0)=1-2^{\alpha-1}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 1, γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty]$ το $f(1)$ είναι μέγιστο της f στο $[0,+\infty)$. Άρα $f(x)\leq f(1)$ ή $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\geq 0$, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία με θετική τεταγμένη, δηλαδή δεν έχει σημεία που να βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x.

II. Είναι $f(x)\leq 0$, για κάθε $x\geq 0$, δηλαδή $(1+x)^\alpha-2^{\alpha-1}(1+x^\alpha)\leq 0\Leftrightarrow(1+x)^\alpha\leq 2^{\alpha-1}(1+x^\alpha)$ (1). Η ισότητα ισχύει για $\alpha=1$ και $x\geq 0$ ή $x=1$ και $\alpha\neq 1$.

III. Αν $\kappa=\lambda=0$, η σχέση ισχύει. Έστω ότι $\lambda\neq 0$. Θέτουμε $x=\frac{|\kappa|}{|\lambda|}\geq 0$ οπότε η (1) γράφεται $\left(1+\frac{|\kappa|}{|\lambda|}\right)^{\alpha}\leq 2^{\alpha-1}\left[1+\left(\frac{|\kappa|}{|\lambda|}\right)^{\alpha}\right]\Leftrightarrow\left(|\kappa|+|\lambda|\right)^{\alpha}\leq 2^{\alpha-1}\left(|\kappa|^{\alpha}+|\lambda|^{\alpha}\right)$. Ισχύει $|\kappa+\lambda|\leq|\kappa|+|\lambda|$, οπότε $|\kappa+\lambda|^{\alpha}\leq(|\kappa|+|\lambda|)^{\alpha}\leq 2^{\alpha-1}(|\kappa|^{\alpha}+|\lambda|^{\alpha})$. ή $|\kappa+\lambda|^{\alpha}\leq 2^{\alpha-1}(|\kappa|^{\alpha}+1\lambda|^{\alpha})$.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε ότι: $\frac{x+a}{2}\in[\alpha,\beta]$ και $\chi\in[a,\beta]$ και $x\succ\frac{x+a}{2}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ θα ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[\frac{x+a}{2},x]$ οπότε υπάρχει ξ$\in\left(\frac{x+a}{2},x\right)$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon:$

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-\frac{x+a}{2}}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}f'(\xi)(\chi-\alpha)=f(\chi)-f(\frac{\alpha+\chi}{2})$$

β) Η f είναι συνεχής και η $\int_a^x f(t)\,dt$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Επίσης η $(x-a)\cdot f\left(\frac{x+a}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με

$g'(x)=f(x)-f\left(\frac{x+a}{2}\right)-\frac{1}{2}(x-a)\cdot f'\left(\frac{x+a}{2}\right)$ άρα:

$$g'(x)=f'(\xi)\cdot\frac{1}{2}(x-a)-\frac{1}{2}(x-a)\cdot f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{2}(x-a)\cdot\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\right]$$

Επειδή η $f''(x)\succ 0$ τότε η $f'(x)\nearrow\sigma\tau o[a,\beta]$ άρα:

$\xi\succ\frac{\chi+\alpha}{2}\Rightarrow f'(\xi)\succ f'\left(\frac{x+a}{2}\right)$ και επειδή $x\succ a$ τότε $g'(x)\succ 0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$.Οπότε η g είναι $\nearrow$ στο $[\alpha,\beta]$.

Η g θα έχει ελάχιστο για χ=α το $g(a)=0$ και μέγιστο το

$$g(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\,dt-(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right).$$

γ) Επειδή η g είναι $\nearrow$ στο $[\alpha,\beta]$ θα έχουμε

$$\beta \succ \alpha \Rightarrow g(\beta) \succ g(a) \Rightarrow \int_a^\beta f(t)\,dt = (\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \succ 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \succ (\beta-\alpha) f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) $[f'(x)-f(x)](x^2+1)=2xf(x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (\frac{f(x)}{x^2+1})' = \frac{f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x^2+1} = c.e^x \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} f(x)=c.e^x(x^2+1) \\ f'(0)=1 \Leftrightarrow c=1 \end{matrix}\right\} f(x) = e^x(x^2+1)$$

β) Έστω $f(x)-y=0 \Leftrightarrow f(x)+x-3=0$ έχει 2 λύσεις, $P_1 < P_2$.

- Θεωρώ: $h(x) = f(x)+x-3$ στο $[P_1,P_2]$
- h παραγωγίσιμη στο $[P_1,P_2]$ με $h'(x)=f'(x)+1$
- $h(P_1)=h(P_2)=0$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (P_1,P_2)$ ώστε

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)+1=0 \Leftrightarrow e^{\xi}(\xi+1)^2=-1$,ΑΤΟΠΟ.

γ) $g'(t)=f(t)$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{e^{2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+1}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{e^t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t}=0$$

δ) Είναι $f(x)=e^x(x^2+1)>0$

$$E(\Omega)=\int_0^a e^x(x^2+1)dx = [e^x(x^2+1)]_0^a - 2\int_0^a xe^x =$$

$$= e^a(a^2+1) - 2[xe^x]_0^a + 2\int_0^a e^x dx =$$

$$= e^a(a^2+1) - 2ae^a + 2[e^x]_0^a = e^a(a-1)^2 + 2(e^a-1).$$

ΘΕΜΑ 4ο

α)

$$|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|\Leftrightarrow |z_1+iz_2|^2=|z_1-iz_2|^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z_1+iz_2)(\overline{z_1}-i\overline{z_2})=(z_1-iz_2)(\overline{z_1}+i\overline{z_2})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2i(\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2})=0\Leftrightarrow \overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=\overline{(\frac{z_1}{z_2})}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$, ισχύει.

β) g παραγωγίσιμη στο [α, β] ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- g συνεχής στο [α, β] ως παραγωγίσιμη.
- g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
- $g(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$
- $g(\beta)=\frac{f(\beta)}{\beta}$

και επειδή $w\in\mathbb{R}$:

$$w=\frac{\alpha+if(\alpha)}{\beta+if(\beta)}=\frac{\alpha\bullet\beta+f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}+\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}$$

άρα $\beta f(\alpha)=\alpha f(\beta)\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}\Leftrightarrow g(\alpha)=g(\beta)$

άρα ισχύει το Θ.Rolle.

γ) Αν $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0,f(x_0))$ για να διέρχεται από το Ο(0,0) πρέπει :

$-f(x_0)=-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$, που ισχύει γιατί σύμφωνα με το Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in$(α, β) ώστε: $g'(x_0)=0$.

δ) Έστω $h(x)=\int_a^x\frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt=\frac{1}{x-a}\int_a^x\frac{f(x+a-t)}{x+a-t}dt$

Θέτω: $u=x+a-t$, $du=-dt$ ή $dt=-du$

Για $t=a, u_1=x$

$t=x, u_1=a$

Άρα :

$$\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{x+a-t}dt = -\int_x^a \frac{f(u)}{u}du = \int_a^x \frac{f(u)}{u}du = \int_a^x \frac{f(t)}{t}dt$$

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

1. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό z=x+yi,x,y $\in R$ για τον οποίο ισχύει: $\left(z+\bar{z}\right)\left[\frac{1}{4}\left(z^2+\bar{z}^2\right)i+\frac{i}{2}\left(|z|^2+4\right)\right]=\bar{\bar{z}}-\bar{z}$.

α) Να παραστήσετε γραφικά το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του αριθμού z στο επίπεδο.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z,αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός $w=\frac{3}{2}\left(z+\bar{z}\right)^2+i\left(z-\bar{z}\right)+2i$ είναι φανταστικός.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των προηγούμενων γεωμετρικών τόπων.

2. Στο σύστημα των αξόνων θεωρούμε τα σημεία Α(0,5),Β(0,3) και Γ(χ,2) με $x \succ 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γωνίας ω, με την οποία φαίνεται από το σημείο Γ το τμήμα ΑΒ , δίνεται από τον τύπο $f(x)=\frac{2x}{x^2+3}$.

β) Για ποία τιμή του χ η γωνία ω γίνεται μέγιστη και πόση?

γ) Αν το σημείο Γ κινείται έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής του χ να είναι $\frac{dx}{dt}=2$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω τη χρονική στιγμή t_0 που είναι χ=2.

3. Αν η συνάρτηση f: $\Re \rightarrow \Re$, είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = (x^2 + 1)e^{\eta\mu x}$, για κάθε πραγματικό x, τότε Δείξτε ότι: α) η f αντιστρέφεται και b) ότι: $\int_0^x f(t)dt + \int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$, για κάθε x πραγματικό.

4. Αν η συνάρτηση f: $\Re \rightarrow \Re$, είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = (x^2 + 1)e^{\eta\mu x}$, για κάθε πραγματικό x, τότε Δείξτε ότι: α) η f αντιστρέφεται και b) ότι: $\int_0^x f(t)dt + \int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$, για κάθε x πραγματικό.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ: ΛΙΟΛΙΟΣ Α..-ΧΟΡΤΗΣ Φ.-ΧΑΤΖΗΝΑΚΟΣ Χ.-
ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΟΥ Ε..-ΧΑΛΒΑΤΖΗ ΕΛ.-
ΛΑΦΑΖΑΝΙΔΟΥ Α - ΘΕΟΧΑΡΟΠΟΥΛΟΥ Ε-
ΜΠΟΥΣΜΠΟΥΡΑ Σ..

.