

**10 Θέμα:**

Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  διανύσματα του επιπέδου με  $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 3$  και  $\hat{\phi} = \left(\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}, \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\right)$  και εξίσωση

(ε):  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3)x + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3)y - 1 = 0$  για κάθε  $\phi \in [0, \pi]$ .

- i. Να δείξετε ότι η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\phi \in [0, \pi]$ .
- ii. Η ευθεία αυτή περνά πάντα από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.
- iii. Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $y=8$  τότε να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} = -3\vec{\alpha}$ .
- iv. Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{v} = 3\vec{i}$  τότε να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ .
- v. Αν η ευθεία με εξίσωση  $y=x$  είναι παράλληλη στην (ε) τότε να δειχθεί ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες.

**20 Θέμα:**

Έστω  $\phi \in [0, 2\pi)$  και η εξίσωση C:  $x^2 + y^2 + (\eta\mu\phi)x + (\sigma\upsilon\nu\phi)y - 2 = 0$ .

- i. Να δείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο.
- ii. Το κέντρο του κύκλου ανήκει σε μία κωνική τομή για κάθε  $\phi \in [0, 2\pi)$ .
- iii. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) :  $(\eta\mu\phi)x + (\sigma\upsilon\nu\phi)y = 1$  εφάπτεται στον κύκλο.
- iv. Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε 
$$\begin{cases} \alpha(\alpha + \eta\mu\phi) + \beta(\beta + \sigma\upsilon\nu\phi) = 2 \\ \gamma(\gamma + \eta\mu\phi) + \delta(\delta + \sigma\upsilon\nu\phi) = 2 \end{cases}$$
, να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η παράσταση  $A = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2$ .

**30 Θέμα:**

Δίνονται οι ακέραιοι  $\alpha = 6\kappa + 4$  και  $\beta = 6\kappa + 2$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

- i. Να δείξετε ότι  $\alpha^2 - \beta^2 = 12\lambda$ .
- ii. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $\alpha^2 + \beta^2$  με το 18.
- iii. Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο  $M(\alpha, \beta)$  αν  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .
- iv. Να βρείτε τα σημεία M ώστε  $OM = \text{ελάχιστο}$ .

**40 Θέμα:**

Έστω τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  τέτοια ώστε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -1$ .

Να δείξετε ότι:

- i. Το διάνυσμα  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$  είναι επίσης μοναδιαίο.
- ii. Για τα διανύσματα  $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ,  $\vec{v} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$  και  $\vec{w} = \vec{\alpha} + \vec{\gamma}$  ισχύει ότι  $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = 2$ .
- iii.  $|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}| = |\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}| = |-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = 2$ .
- iv. Το διάνυσμα  $\vec{u}$  είναι κάθετο στο  $\vec{v} - \vec{w}$ .

ΛΥΣΕΙΣ

**1ο Θέμα:**

i. Αν  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3 = 0$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 = 0$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3$  που είναι προφανώς αδύνατο, οπότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3 \neq 0$  ή  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 \neq 0$  άρα η (ε) παριστάνει ευθεία.

ii. Η (ε) γίνεται  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}(x+y) + (3x-3y-1) = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu\phi(x+y) + (3x-3y-1) = 0$ .

$$\text{Πρέπει} \begin{cases} x+y=0 \\ \text{και} \\ 3x-3y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Το σημείο  $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$  επαληθεύει την (ε) για κάθε  $\phi \in [0, \pi]$ .

iii. Πρέπει

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu\phi = -3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = -1 \Leftrightarrow \phi = \pi. \text{ Άρα}$$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \text{ και } |\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}| \text{ άρα } \vec{\beta} = -3\vec{\alpha}.$$

iv. Πρέπει

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu\phi = 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = 1 \Leftrightarrow \phi = 0. \text{ Άρα}$$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \text{ και } |\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}| \text{ άρα } \vec{\beta} = 3\vec{\alpha}.$$

v.  $\lambda_\varepsilon = -\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3} = 1 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3 = 3 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$  και  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

Για  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$  η (ε) γίνεται:  $3x-3y-1=0$  τέμνει τους άξονες στα σημεία

$$A\left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ και } B\left(0, -\frac{1}{3}\right).$$

$$E = \frac{1}{2}(\text{OA})(\text{OB}) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{3} \right| \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{18} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

**2ο Θέμα:**

i.  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\eta\mu\phi)^2 + (\sigma\upsilon\nu\phi)^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ . Άρα η C

παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K\left(-\frac{\eta\mu\phi}{2}, -\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right)$  και ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$ .

ii. Το  $K\left(-\frac{\eta\mu\phi}{2}, -\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right)$  και  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Άρα:

$$\left. \begin{matrix} x = -\frac{\eta\mu\phi}{2} \\ y = -\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2x = -\eta\mu\phi \\ 2y = -\sigma\upsilon\nu\phi \end{matrix} \right\} \Rightarrow (2x)^2 + (2y)^2 = (-\eta\mu\phi)^2 + (-\sigma\upsilon\nu\phi)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$4x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow C_2: x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Δηλαδή η  $C_2$  παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K_2(0,0)$  και  $\rho = \frac{1}{2}$ .

iii. Αρκεί να δείξουμε ότι:  $d(K, \varepsilon) = \rho$ . Όμως:  $K\left(-\frac{\eta\mu\phi}{2}, -\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right)$

οπότε:

$$d(K, \varepsilon) = \frac{\left| \eta\mu\phi \left(-\frac{\eta\mu\phi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\phi \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu\phi}{2}\right) - 1 \right|}{\sqrt{(\eta\mu\phi)^2 + (\sigma\upsilon\nu\phi)^2}} = \frac{\left| -\frac{\eta\mu^2\phi}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\phi}{2} - 1 \right|}{\sqrt{1}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} - 1 \right|}{1} = \frac{3}{2} = \rho$$

iv. Προφανώς τα σημεία  $A(\alpha, \beta)$  και  $B(\gamma, \delta)$  είναι σημεία του κύκλου C. Επίσης η παράσταση  $A = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 = AB^2$ . Η μεγαλύτερη όμως απόσταση δύο σημείων του κύκλου είναι  $AB_{\max} = 2\rho = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ . Άρα η μεγαλύτερη τιμή της

$$A_{\max} = 3^2 = 9.$$

**3ο Θέμα:**

i. Είναι

$$\begin{cases} \alpha^2 = (6\kappa + 4)^2 = 36\kappa^2 + 48\kappa + 16 \\ \beta^2 = (6\kappa + 2)^2 = 36\kappa^2 + 24\kappa + 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = (36\kappa^2 + 48\kappa + 16) - (36\kappa^2 + 24\kappa + 4)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 24\kappa + 12 = 12(2\kappa + 1)$$

Άρα  $12 \mid (\alpha^2 - \beta^2)$  δηλαδή  $\alpha^2 - \beta^2 = 12\lambda$ .

ii. Επίσης:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (36\kappa^2 + 48\kappa + 16) + (36\kappa^2 + 24\kappa + 4) = 72\kappa^2 + 72\kappa + 20 = 18(4\kappa^2) + 18(4\kappa) + 18 + 2 = 18(4\kappa^2 + 4\kappa + 1) + 2 \quad (1)$$

και αφού  $4\kappa^2 + 4\kappa + 2 \in \mathbb{Z}$  συνεπάγεται ότι η (1) είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του  $\alpha^2 + \beta^2$  με το 18 και ότι  $v=2$ .

iii.  $M(6\kappa + 4, 6\kappa + 2)$ . Έστω

$$\begin{cases} x = 6\kappa + 4 \\ y = 6\kappa + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 6\kappa \\ y - 2 = 6\kappa \end{cases} \Rightarrow x - 4 = y - 2 \Rightarrow x - y = 2. \text{ Άρα το σημείο } M$$

κινείται στην ευθεία  $x - y = 2$ , έχοντας ακέραιες συντεταγμένες.

iv. Το OM γίνεται ελάχιστο όταν  $OM^2$  γίνει ελάχιστο.

$$OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 72\kappa^2 + 72\kappa + 20. \text{ Το τρίγωνο παρουσιάζει}$$

ελάχιστο για  $\kappa = -\frac{72}{2 \cdot 72} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

Άρα εξετάζουμε την απόσταση OM για τα σημεία με  $\kappa = -1$  και  $\kappa = 0$ .

Για  $\kappa = -1$ ,  $M(-2, -4)$   $OM = \sqrt{20}$ . Επομένως αυτά τα δύο σημεία είναι με την

Για  $\kappa = 0$ ,  $M(4, 2)$   $OM = \sqrt{20}$

ελάχιστη απόσταση από το O.

#### 40 Θέμα:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} =$$

i.  $|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(-1) = 1$

Άρα  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 1$

ii.  $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\alpha} + \vec{\gamma}| = 2|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 2$

iii.  $|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})| = 2|\vec{\beta}| = 2$  Ομοίως αποδεικνύονται ότι:

$$|\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}| = |-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = 2$$

$$|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}|^2 \Rightarrow$$

iv.  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{w}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{w} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{w}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{w} - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$

$$\Rightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 4\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow 4\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0. \text{ Άρα } \vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w}).$$

#### Προτεινόμενα Θέματα

10 Έστω ο αριθμός  $A = \frac{5\kappa - 2}{3}$ .

- Να βρείτε κάθε ακέραιο  $\kappa$ , ώστε ο A να είναι ακέραιος.
- Να βρείτε τους ακέραιους  $\kappa$  ώστε ο A να είναι τετράγωνο ακέραιου.
- Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος  $\kappa > 1$ , ώστε η εξίσωση  $x^2 + 2x + 1 - \frac{A}{4} = 0$  να έχει ρητές λύσεις.

20 Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 2 = 2x \ln \theta + \ln^2 \theta + 4 \ln \theta$  όπου  $\theta > 0$

- Για ποιες τιμές του  $\theta$  η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο;
- Για τις τιμές που βρέθηκαν στο ερώτημα (i) να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.
- Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του  $\theta$  ώστε η ευθεία με εξίσωση  $x = y - 4$  να εφάπτεται του κύκλου.