Μαθηματικά Γ΄ λυκείου θετικής-τεχνολογικής κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1^o Από τα λιμάνια Α(-6,17) και Β(2,-14) αναχωρούν συγχρόνως 2 πλοία $Π_1$ και $Π_2$.Οι συντεταγμένες των πλοίων είναι οι εικόνες των μιγαδικών, $z_1=(4t-6)+(17-3t)i$ και $z_2=3t+2+(4t-14)i$, t σε ώρες και $t \geq 0$.

Α)Πόσο θα απέχουν μετά από μια ώρα ταξίδι;
Β)υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης;
Γ)που πρέπει να φτιάξουμε σταθμό ανεφοδιασμού που να εξυπηρετεί και τα 2 πλοία;
Δ)Ποια χρονική στιγμή το μέτρο του z1 γίνεται ελάχιστο;

ΛΥΣΗ

Α)Για t=1 $z_1=-2+14i$ και $z_2=5-10i$ και $z_1-z_2=-7+24i$ αρα

$\Pi_1\Pi_2=|z_1-z_2|=\sqrt{(-7)^2+24^2}=\sqrt{625}=25$.

Β)Εξετάζουμε αν υπάρχει $t \geq 0$ τέτοιο ώστε $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4t-6=3t+2 \\ 17-3t=4t-14 \end{cases}$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει λύση για το (Σ).
Γ)Πρώτα θα βρούμε τις πορείες που κάνουν τα πλοία.

$\left.\begin{matrix} x=\mathrm{Re}(z_1)=4t-6 \\ y=\mathrm{Im}(z_1)=17-3t \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+6}{4}=t\geq 0 \\ \frac{17-y}{3}=t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+6}{4}=\frac{17-y}{3}$ αρα ϵ_1:3x+4y=50 με $x \geq -6$.

Με όμοια διαδικασία για το z_2 έχουμε ϵ_2:4x-3y=50 με $x \geq 2$.
Προφανώς ο σταθμός ανεφοδιασμού πρέπει να γίνει στο σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 . $\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=50 \\ 4x-3y=50 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x,y)=(14,2)$

Δ)Για να βρούμε τον z_1 πρέπει να βρούμε ποιο σημείο της ϵ_1 απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων. τελικά πρέπει να βρούμε το σημείο τομής της καθέτου προς την ϵ_1 από το Ο και της ϵ_1.Αρα λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ 3x+4y=50 \end{cases} \Leftrightarrow 3x+4\cdot\frac{4}{3}x=50 \Leftrightarrow 25x=150 \Leftrightarrow x=6$ και y=8. Αρα πρέπει $x=4t-6=6 \Leftrightarrow 4t=12 \Leftrightarrow t=3h$.

ΘΕΜΑ 2^o Εστω f συνάρτηση ορισμένη στο **R** , δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(x)-2\int_0^x f(t)dt=2x+2003$ (1)

Α)Βρείτε τον τύπο της f
Β)Δείξτε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια αρνητική ρίζα.
Γ)Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο Α(0,f(0)).
Δ)Δείξτε ότι $f(x) \geq 4008x+2003$.

ΛΥΣΗ

Α)Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, επομένως όλες οι συναρτήσεις που υπάρχουν στην εξίσωση (1) είναι παραγωγίσιμες. Παραγωγίζοντας την παίρνουμε $f'(x)-2f(x)=2$

Πολ/ντας με e^{-2x} παίρνουμε $e^{-2x}\cdot f'(x)+\left(e^{-2x}\right)'\cdot f(x)=\left(-e^{-2x}\right)'$

Αρα $\left(e^{-2x}\cdot f(x)\right)'=\left(-e^{-2x}\right)'$ οπότε $e^{-2x}\cdot f(x)=-e^{-2x}+c$ (2), για x=0 από την (2) παίρνουμε f(0)=-1+c.Όμως από την (1) για x=0 παίρνουμε f(0)=2003 άρα c=2004 και τελικά

$$f\left(x\right)=\frac{-e^{-2x}+2004}{e^{-2x}}=-1+2004e^{2x}.$$

B)Η f είναι συνεχής στο (-∝,0] και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1<0$ f(0)=2003>0.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το (-1,2003] και σύμφωνα με το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.Ομως $f'\left(x\right)=4008e^{2x}>0$ άρα f γν.αύξουσα και επομένως η λύση είναι μοναδική.

Γ)f(0)=2003 και f΄(0)=4008 άρα y-2003=4008(x-0) οπότε y=4008x+2003.

Δ)Είναι $f''\left(x\right)=8016e^{2x}>0$ άρα η f είναι κυρτή και η C_f πάνω από την y=4008x+2003 δηλαδή f(x) ≥ 4008x+2003.

<u>ΘΕΜΑ 3°</u> Α. Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο **R**.Αν υπάρχει $x_0 \in$ **R** ώστε $f''\left(x_0\right)=0$ και $f^{(3)}\left(x_0\right)>0$ ν.δ.ο. η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 .

<u>ΛΥΣΗ</u>

$f^{(3)}\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''\left(x\right)-f''\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''\left(x\right)}{x-x_0}$.Επειδή $f^{(3)}\left(x_0\right)>0$ θα είναι και

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''\left(x\right)}{x-x_0}>0$ άρα και $\frac{f''\left(x\right)}{x-x_0}>0$ σε περιοχή του x_0 .

Για $x\in(x_0-\delta,x_0)$ είναι $x-x_0<0$ άρα f΄΄(x)<0 .

Για $x\in(x_0,x_0+\delta)$ είναι $x-x_0>0$ άρα f΄΄(x)>0.Επομένως η f παρουσιάζει

στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ καμπή.

Β. Δίνεται συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο **R** .Αν ισχύει f(x) ≥ 0 και η εξίσωση f(x)=0 έχει μόνο 3 ρίζες ν,δ.ο. η $f^{(3)}\left(x\right)$ έχει 3 τουλάχιστον ρίζες.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ οι λύσεις της f(x)=0. Επειδή f(x) ≥ 0 έπεται πως

η συνάρτηση στα ρ_1,ρ_2 και ρ_3 παρουσιάζει ελάχιστο ενώ είναι και παραγωγίσιμη. Σύμφωνα με το Θ.Fermat θα είναι

$f'\left(\rho_1\right)=f'\left(\rho_2\right)=f'\left(\rho_3\right)=0$. Επίσης η f πληρεί τις προϋποθέσεις του θ.Rolle στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ άρα θα υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ έτσι ώστε $f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right)=0$.

Αφού η $f'\left(x\right)=0$ έχει 5 τουλάχιστον ρίζες με εφαρμογή του θ.Rolle στα αντίστοιχα διαστήματα που δημιουργούνται προκύπτει ότι η $f''\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον 4 και τελικά η $f^{(3)}\left(x\right)$=0 3 τουλάχιστον ρίζες.

<u>ΘΕΜΑ 4</u>° Α. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α,β] και 1-1 με f(α)=α και f(β)=β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των καμπυλών y=f(x)

και $y=f^{-1}(x)$ στο [α,β] είναι E=$\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-x\right|dx$.

B. Αν είναι $f(x)=\sqrt{x}-x$ με 0 ≤ x ≤ ¼ να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των y=f(x) και $y=f^{-1}(x)$.

ΛΥΣΗ

A. Έστω (χωρίς βλάβη γενικότητας) , ότι για κάθε x∈ [α,β] είναι $f(x)\geq f^{-1}(x)$ τότε $E=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-f^{-1}(x)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}f^{-1}(x)dx$ (1)

στο $\int_{a}^{\beta}f^{-1}(x)dx$ θέτω x=f(u) με dx=f΄(u)du , f(u)=α=f(α) ⇒ u=α και f(u)=β=f(β) ⇒ u=β αφού f 1-1. Επομένως έχουμε

$\int_{\alpha}^{\beta}f^{-1}(x)dx=\int_{a}^{\beta}f^{-1}(f(u))f'(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du=$

$\beta^2-\alpha^2-\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du=2\int_{\alpha}^{\beta}udu-\int_{a}^{\beta}f(u)du$ ή $2\int_{\alpha}^{\beta}xdx-\int_{a}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}2x-f(x)dx$

άρα (1) : E=$2\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-x]dx$.Αν θεωρήσουμε ότι $f(x)\leq f^{-1}(x)$ τότε θα καταλήγαμε στη σχέση E=$2\int_{\alpha}^{\beta}[x-f(x)]dx$, άρα τελικά E=2 $\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-x\right|dx$.

B. H f εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής και 1-1 με f(0)=0 και f(1/4)=1/4 άρα $\mathrm{E}=2\int_{0}^{\frac{1}{4}}\left|f(x)-x\right|dx=2\int_{0}^{\frac{1}{4}}\left|\sqrt{x}-2x\right|dx$ με

$\sqrt{x}-2x\geq 0$ E=2 $\int_{0}^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{x}-2x\right)dx$=…=1/6-1/8=1/24τμ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ:

1.α)Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{dt}{t-\ln t}$$

β)Να μελετήσετε την μονοτονία της f.

γ)Να αποδείξετε ότι f(x) ≤ x ,x>0

δ) Να αποδείξετε ότι f(x) ≥ ln2, x ≥ 1

2.Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$ με x∈8

i)να υπολογίσετε την παράγωγο της f.

ii)επίσης το ολοκλήρωμα I=$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$

iii)έστω J=$\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ και K=$\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+2}dx$ να δείξετε ότι J+2I=K

iv)να δείξετε ότι $K=\sqrt{3}-J$ και να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα J και K.